

**Risco e retorno de ativos individuais e sua relação com a otimização de carteiras:
uma análise de clusters no mercado brasileiro**

LETÍCIA RENATA DA COSTA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MINAS GERAIS (IFMG)

LÉLIS PEDRO DE ANDRADE

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MINAS GERAIS (IFMG)

WASHINGTON SANTOS SILVA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MINAS GERAIS (IFMG)

DANIEL FONSECA COSTA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MINAS GERAIS (IFMG)

BRUNO CÉSAR DE MELO MOREIRA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MINAS GERAIS (IFMG)

RISCO E RETORNO DE ATIVOS INDIVIDUAIS E SUA RELAÇÃO COM A OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS: UMA ANÁLISE DE CLUSTERS NO MERCADO BRASILEIRO

1 INTRODUÇÃO

A moderna teoria de portfólio indica que a variabilidade de uma carteira não se baseia apenas pela média de risco dos ativos individuais, mas considera também a correlação existente entre os mesmos (MARKOWITZ, 1952). Uma das premissas básicas proposta por Markowitz (1952) é que dentre a escolha de dois investimentos com o mesmo nível de retorno esperado, o investidor optará pelo que possua menor volatilidade, ou seja, os mesmos são, na sua essência, avessos ao risco.

No entanto, é possível encontrar na literatura estudos em que ativos individuais com alto desvio padrão contribuíram para a minimização do risco de uma carteira como um todo (SOUSA *et al*, 2017; OLIVEIRA *et al*, 2011). Assim, por meio da otimização de uma carteira frente a teoria de mínima variância, torna-se possível verificar que ativos com alto desvio padrão em relação à sua média compuseram a carteira otimizada (SOUSA *et al*, 2017; OLIVEIRA *et al*, 2011).

Apesar da existência de pesquisas que abordem o tema otimização da carteira (OLIVEIRA *et al*, 2011; FARIAS; MOURA, 2013; MARQUES *et al*; 2013; SOUZA *et al*, 2017), a maioria trata apenas do desenvolvimento de carteiras de investimentos, notando-se que há uma carência de estudos que abordem a relação risco e retorno individuais dos ativos no processo de otimização de uma carteira. Desta forma, o objetivo do trabalho consiste no desenvolvimento de um modelo de otimização de carteiras de investimento a partir da associação de clusters com a abordagem de Markowitz.

Considera-se relevante esta pesquisa por abranger uma questão ainda não respondida formalmente na literatura. Os resultados encontrados poderão contribuir para que investidores compreendam a relevância da relação de risco e retornos de ativos individuais e de portfólios otimizados. Uma vez que a otimização de uma carteira visa encontrar os pesos que minimizam o risco de uma carteira de investimentos, tendo como principal dado de entrada a matriz de covariâncias, a qual inclui em sua diagonal principal as variâncias dos ativos individuais. Julga-se pertinente, neste trabalho, encontrar evidências que expliquem onde estão as maiores contribuições das covariâncias, considerando diferentes grupos, separados por características de risco e retorno. Portanto, o trabalho visa contribuir com a literatura relacionada por propor segregar as fontes de minimização do risco de uma carteira, considerando os níveis de eficiência individual dos ativos, e as covariâncias de seus diferentes pares.

São possíveis implicações dos resultados gerados a partir deste trabalho: i) de natureza teórica, por verificar a relevância das características de risco e retorno individuais, na composição de carteiras otimizadas; ii) de natureza aplicada, aos investidores, na seleção de seus portfólios, a partir de seus níveis de aversão ao risco, pois, especificamente, os resultados permitem verificar o *trade-off* entre incluir ativos na carteira devido as suas características de risco e retorno individuais, ou se devido a potencial contribuição das correlações destes ativos.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Risco, retorno e otimização de carteiras

A relação sobre o risco e o retorno e a forma com que o investidor toma decisões sobre a composição de carteiras de investimentos, são temas abordados na área de finanças (VALLE; TEIXEIRA, 2008). O risco total consiste na combinação do risco sistemático (não diversificável) com o risco não sistemático (diversificável). Para a redução do risco não sistemático temos a diversificação de investimentos, que contribui para a redução dos riscos individuais inerentes aos fatos ocorridos em empresas isoladamente ou a grupos específicos. O contrário pode-se dizer que o risco sistemático segue o movimento do mercado e afeta como um todo o mercado de ações (AMORIM, LIMA, MURCIA, 2012).

Markowitz (1952) constatou que é possível minimizar o risco diversificável por meio da seleção otimizada de portfólio. A obra de Markowitz, por sua importância, deu origem à Moderna Teoria de Portfólios que, de acordo com Bruni e Famá (1998), caracteriza-se como sendo o retorno esperado de um conjunto de ativos, que é o resultado da média dos retornos individuais, ponderados pela porcentagem que cada ativo representa na carteira. Sendo o portfólio ótimo determinado através de um problema de programação linear, que objetiva minimizar o risco da carteira, por meio de um retorno esperado (CAVALCANTE *et al.*, 2016).

Segundo Leal e Campani (2016) as carteiras de mínima variância são atraentes devido ao fato de apresentar eficiência e menor variância possível, implicando, pois, na ínfima volatilidade esperada, ou seja, trata-se de uma carteira localizada mais à esquerda da fronteira eficiente.

2.2 Fronteira eficiente

A extensa aplicação da fronteira eficiente resume-se em relacionar o retorno esperado e o risco de cada carteira considerando as possíveis combinações de títulos que podem formá-la, e por meio dela, traçar a curva da Fronteira de Eficiência (BARCELOS, HAMACHER, PACHECO, 2003). Essa curva trata-se de um conjunto de pontos que demonstram que um portfólio apresenta maior nível de retorno esperado, dado o risco ou o menor nível de risco, dado o retorno (BRUNI; FAMÁ, 1998). Assim sendo, a criação da fronteira pretende demonstrar ao tomador de decisão um conjunto de portfólios para que o mesmo possa decidir por qual optar. E esta predileção se dá de acordo com o perfil de risco de cada um, ou seja, a escolha se deve ao julgamento pessoal de diferentes investidores, que estão dispostos a aceitar riscos distintos (BARCELOS, HAMACHER, PACHECO, 2003).

Conforme Oliveira *et al.* (2011, p.6), “diversos artigos são publicados buscando desenvolver ou aperfeiçoar técnicas para otimizar carteiras de investimentos devido à grande relevância que este tema possui para a vida dos investidores em geral”. Pode-se citar Oliveira *et al.* (2011), Farias e Moura (2013), Marques *et al.* (2013) e Souza *et al.* (2017).

Tabela 1: Otimização de carteiras na literatura brasileira

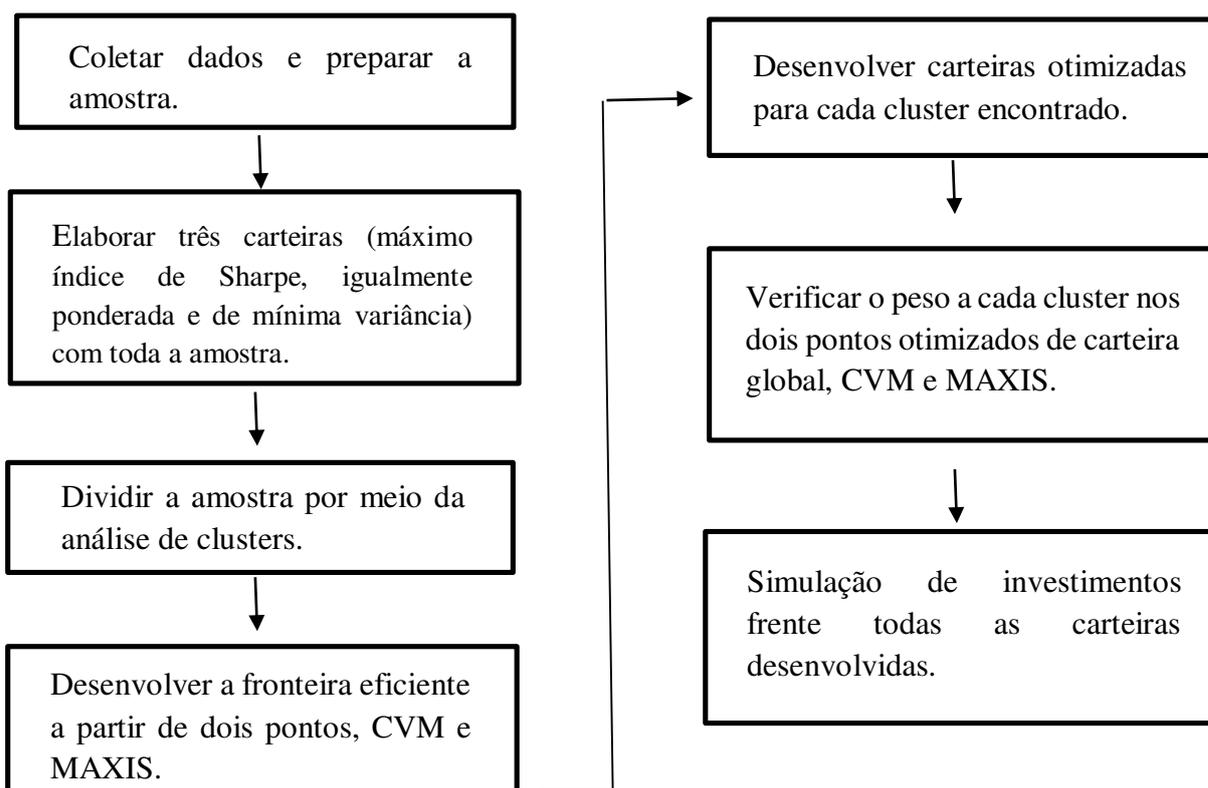
Autores	Objetivo	Principais resultados encontrados
Oliveira <i>et al.</i> (2011)	Otimizar a relação retorno e risco de uma carteira formada por ativos que fizeram parte das oito últimas alterações no período de 2009 a 2011.	A melhor relação retorno/risco foi formada por ativos com baixa participação na composição do índice Bovespa de maio a agosto de 2011, o portfólio ótimo é composto por 11 ativos com um retorno de 0,17% e risco de 1,14, apresentando, pois, resultados superiores aos demais índices utilizados como comparativos.

Farias e Moura (2013)	Analisar se a composição de um portfólio de ações construído por meio do modelo de <i>Markowitz</i> é mais eficiente que a estratégia de diversificação ingênua.	Dois distintos cenários foram testados, e apenas no primeiro cenário o procedimento de Markowitz foi mais eficaz que a diversificação ingênua.
Marques <i>et al.</i> (2013)	Comparar desempenhos diferentes de uma carteira otimizada, sendo uma baseada no modelo de <i>Markowitz</i> no ano de 2009, e outra utilizando dados reais obtidos no ano subsequente, tudo isto com o intuito de testar a eficiência da mesma.	Os comportamentos das carteiras foram muito próximos ao previsto. Tendo a carteira de menor risco em 2009, um risco baixo em 2010 e a carteira de máximo índice de Sharpe um desempenho superior à maioria das ações da amostra.
Rubesam e Beltrame (2013)	Investigar carteiras de variância mínima no mercado de ações brasileiro.	As carteiras de variância mínima apresentaram retornos maiores e variações menores. O grupo de ações que compõem estas carteiras de mínima possuem ações com os β s baixos e consequentemente tendem a não pertencerem ao Ibovespa.
Souza <i>et al.</i> (2017)	Desenvolver em seu estudo uma carteira de investimentos com ativos que compõem o índice Bovespa com o intuito de maximizar a relação entre risco e retorno.	A carteira otimizada obteve retorno superior à carteira Ibovespa em 107,84, obteve ainda um risco inferior.

Fonte: Dados da pesquisa

3 METODOLOGIA

A Figura 1 possui a representação em forma de fluxograma dos procedimentos seguidos na construção da presente pesquisa.



*CVM significa carteira de variância mínima; MAXIS significa carteira de máximo índice de Sharpe

Figura 1: Síntese da metodologia

Fonte: Dados da pesquisa

Foi considerado um horizonte temporal que compreende o período de 01/01/2016 a 31/08/2019, tendo como população as 100 empresas presentes no Índice Brasileiro 100 (IBrX100) no segundo quadrimestre de 2019. A escolha se deu pela necessidade de ter a disposição ativos que possuem liquidez na bolsa, visto que se trata de um índice de preços que mede o retorno de uma carteira teórica formado pelas cem ações mais negociadas na Bolsa, Brasil, Balcão (B3, 2019).

Foram utilizados os preços de fechamento diários das ações que compõem a amostra do trabalho, com o intuito de determinar a rentabilidade diária de cada ativo individual, tais dados foram coletados por intermédio do *software* Economática. Vale ressaltar que foram considerados todos os proventos, e os dados foram deflacionados.

Após a exclusão dos ativos com dados incompletos para a análise, foram excluídas ainda da amostra os dados considerados *outliers*, que corresponderam a um total de 3 empresas, denominadas como GFSA3, GOLL4 e MGLU3. Os *outliers* foram encontrados após o uso da função *boxplot* do *Software* Estatístico R.

Feito isso, o passo seguinte foi determinar três carteiras: i) a ingênua, na qual considera-se pesos homogêneos para todos os ativos da carteira; ii) a de máximo índice de Sharpe, a qual trata-se de uma carteira otimizada que faz uso da programação linear para maximizar o índice de Sharpe da carteira e; iii) a de mínima variância, que também faz uso da programação linear mas possui como objetivo a minimização do coeficiente de determinação. Para a resolução dos cálculos utilizou-se as planilhas eletrônicas. A priori, foi calculado o retorno diário dos ativos, dado pela Equação (1). Para identificar o retorno médio das ações analisadas, foi calculado a média dos retornos diários pela Equação (2). Posteriormente foi calculado o desvio padrão dos retornos de cada ativo pela Equação (3).

$$R_i = \left(\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \right) * 100 \quad (1)$$

Sendo: R_i = é o retorno diário individual; P_t = é o preço de fechamento da ação no dia; P_{t-1} = é a cotação da ação no dia imediatamente anterior.

$$\bar{r} = \frac{\sum_{j=1}^n r_i}{n} \quad (2)$$

Onde: \bar{r} = retorno esperado; r_i = retorno diário individual; n = número de observações.

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (r_i - \bar{r})^2}{n - 1}} \quad (3)$$

Onde: \bar{r} = retorno esperado; r_j = retorno diário individual; n = número de observações; σ_r = desvio padrão dos retornos.

Feito o cálculo do risco e do retorno dos ativos, os mesmos foram agrupados frente a teoria de *cluster analysis*, trata-se de uma ferramenta de que visa fazer uma triagem com o intuito de agrupar características semelhantes (BEM; GIACOMINI; WAISMANN, 2014). O agrupamento no contexto da presente pesquisa foi em função do grau de associação das características de risco e retorno dos ativos individuais. Foi utilizado o método não hierárquico de agrupamento para classificar os ativos com base em suas características de risco e retorno. Para a escolha da quantidade de clusters a ser utilizada, recorreu-se a análise do dendograma que é obtida por meio da análise de clusters pelo método hierárquico. Para a otimização das carteiras, adotou-se modelo de Markowitz (1952), o qual foi utilizado para elaborar as fronteiras eficientes entre o ponto de mínima variância e máximo índice de Sharpe.

$$E = \sum_{i=1}^n X_i \mu_i \quad (4)$$

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij} \quad (5)$$

Em que os termos: E representa o retorno esperado da carteira; V, a variância da carteira; X_i o vetor dos pesos de cada ativo no portfólio otimizado, e μ_i o retorno esperado de cada ativo

4 RESULTADOS

O presente trabalho apresentou três distintas carteiras, sendo as mesmas, a ingênua (CIP), de mínima variância (CVM), e de máximo índice de *Sharpe* (MAXIS). Por meio da Tabela 2 é apresentada uma síntese dos resultados obtidos a partir de todos os dados, das carteiras mencionadas, bem como os dados do IBOV e do CDI.

Tabela 2: Resultados descritivos dos ativos

	Carteira ingênua (CIP)	Carteira de mínima variância (CVM)	Carteira de máximo índice de <i>Sharpe</i> (MAXIS)	CDI	IBOV
Retorno	0,1240%	0,0721%	0,2647%	0,0518%	0,0898%
Risco	1,3023%	0,8013%	1,4513%	0,0759%	1,4012%
Coefficiente de Variação	10,5051	11,1141	5,4817	1,4648	15,6022
Índice de <i>Sharpe</i>	0,0554	0,0253	0,1467		0,0271
Beta IBOV	0,8904	0,4436	0,7692		1
R2	0,9168	0,6009	0,4382		
Índice de <i>Treynor</i>	0,0008	0,0005	0,0034		
Índice de <i>Jensen</i>	0,120%	0,003%	0,189%		
VaR	-3,24	-1,99	-3,48		
Índice de Sortino	0,0706	0,0373	0,2388		
Nº de ativos	83	24	12		73

Fonte: Dados da pesquisa

Identifica-se que dentre as carteiras analisadas, o maior retorno encontrado advém da carteira que maximiza o índice de *Sharpe* MAXIS (0,2647%), que quando comparado com a carteira ingênua e a de mínima variância apresenta uma superioridade de 113,46% e 267,13%, respectivamente. Quando comparadas pela perspectiva do risco de forma isolada, o risco da MAXIS foi de 1,45%, contra 1,3% da CIP e 0,80% da CVM. Ou seja, houve uma redução de 38,47% no risco apresentado pela CVM comparado à CIP e de 44,21% em relação a MAXIS.

Cabe ressaltar, ainda, que a carteira MAXIS apresenta menor risco à cada unidade de retorno adicional desejado, tanto referente às demais carteiras quanto ao próprio IBOV. Visto que a carteira de máximo índice de *Sharpe* sofreu uma redução em seu coeficiente de variação de 47,81% comparada a ingênua, 50,58% em relação a CVM e de 64,86% frente ao IBOV.

Verifica-se, ainda, que o índice de *Sharpe*, apresenta-se como um indicador que demonstra o quanto de prêmio pelo risco um investidor terá por cada unidade de risco do ativo.

Nesse quesito, a carteira de máximo índice de *Sharpe* oferece 0,1467 de prêmio pelo risco, para cada unidade de risco do portfólio. Em seguida, tem-se a carteira a CIP (0,0554) com maior índice de *Sharpe*, logo após a do IBOV (0,0271%) e por último a CVM (0,0254%).

Quanto ao coeficiente Beta, tendo o índice IBOV como carteira de mercado, percebe-se que o menor valor foi identificado na carteira de mínima variância, indicando que a minimização do risco diversificável, neste caso, diminuiu também o grau de risco sistêmico, ou risco de mercado.

No que diz respeito ao coeficiente de R2, identifica-se que a carteira igualmente ponderada (CIP) apresentou o maior valor (91,68%), ou seja 91,68% das variações de seus retornos é explicada pela carteira de mercado, representada pelo (IBOV). Também, verifica-se que a carteira de variância mínima (CVM) apresentou um R2 equivalente a 60,09%, o que foi um valor intermediário entre as opções otimizadas, uma vez que a carteira que maximiza o índice de *Sharpe* (MIS) apresentou o R2 na ordem 43,82%.

Outro fator que deve ser destacado é a quantidade de ativos que cada carteira é composta, a CIP torna-se inviável pela grande quantidade de ativos que a compõem (83), o que torna a gestão da mesma mais onerosa aos investidores. O contrário acontece com a carteira que maximiza o índice de *Sharpe* (MAXIS) que apresenta apenas 12 ativos.

Após o estudo das carteiras globais a amostra foi realocada em grupos com o auxílio do *software* estatístico R, a Figura 2 apresenta a dispersão dos ativos enumerados pelos grupos a quais foram alocados.

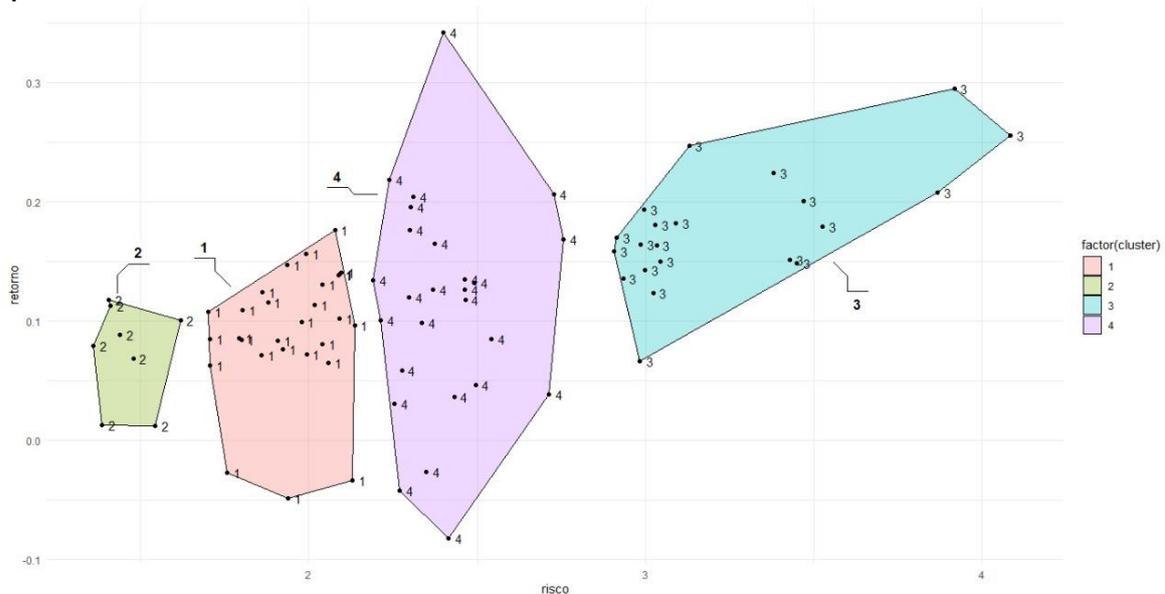


Figura 2: Risco e retorno dos ativos individuais e agrupados
Fonte: Dados da pesquisa

Com o intuito de dispor da quantidade considerada adequada de agrupamentos, para avaliar os níveis de similaridade entre as características de risco e retorno individuais dos ativos, foi analisado o dendograma pelo método hierárquico de agrupamento, e optou-se por quatro grupos. O primeiro agrupamento é composto por 28 ativos, o segundo por 8, o terceiro por 21 e o quarto por 26.

A Tabela 2 apresenta a análise descritiva dos ativos classificados em cada um dos quatro clusters.

Tabela 3: Análise descritiva dos clusters

Método não Hierárquico					
	Risco	Retorno	Índice de Sharpe	Coefficiente de Variação	Quantidade de ativos
Cluster 1	1,942%	0,091%	0,0469	21,34	28
Cluster 2	1,454%	0,074%	0,0509	19,65	8
Cluster 3	3,248%	0,178%	0,0548	18,25	21
Cluster 4	2,401%	0,112%	0,0466	21,44	26

Fonte: Dados da pesquisa

É perceptível que entre os clusters, o de maior índice de *Sharpe* (IS) foi o cluster 3 (0,0548), seguido pelo cluster 2 (0,0509), contraposto a isso seus coeficientes de variação apresentaram-se inferiores aos demais, sendo o do cluster 3 de 18,25 e cluster 2 de 19,65, o cluster 1 foi igual a 21,34 e o cluster 4 de 21,44.

Com base nos riscos e retornos encontrados pelas carteiras otimizadas foi possível determinar a fronteira eficiente, como pode ser visto na Figura 3. Vale ressaltar que foi incluído no gráfico a CIP, o IBOV, o CDI, o cluster 1, o cluster 2, o cluster 3 e o cluster 4.

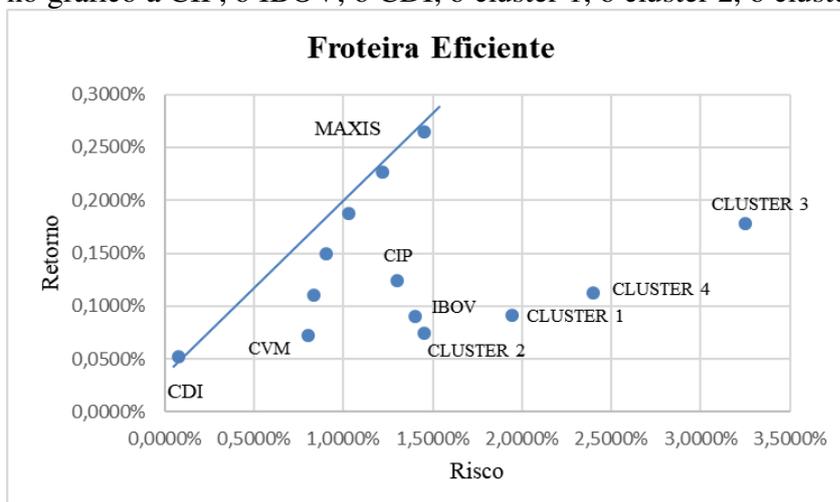


Figura 3: Fronteira eficiente e disposição das carteiras igualmente ponderadas utilizadas
Fonte: Dados da pesquisa

Por meio da fronteira eficiente predisposta na Figura 3, é possível identificar a relação entre retorno e risco das carteiras ou ativos individuais estudados no presente trabalho. Identifica-se que o MAXIS representa o ponto com maior retorno dentre os demais e o de menor risco após o CDI é o CVM.

Vale ressaltar que o IBOV apresentou um retorno superior à média do cluster 2, considerando ainda que seu risco é inferior (3,63%), o cluster 1 apresenta mesmo retorno que o IBOV mas um risco consideravelmente superior, portanto o IBOV é considerado mais eficiente que os clusters 1 e 2. Comparativamente ao IBOV, pode-se inferir que apenas o cluster 3, em relação aos demais clusters, pode ser considerado eficiente.

Além disso, os 83 ativos que compuseram a amostra foram agrupados frente a teoria de análise de clusters, como já mencionado anteriormente. A Tabela 4 e a Tabela 5 sintetiza os resultados encontrados, sendo a primeira referente aos dados dos clusters otimizados frente a teoria de mínima variância e a segunda a otimização frente a abordagem de máximo índice de Sharpe.

Tabela 4: Síntese dos resultados frente a teoria de mínima variância

	Mínima variância				
	CVM	Cluster 1	Cluster 2	Cluster 3	Cluster 4
Retorno	0,07%	0,06%	0,07%	0,15%	0,09%
Risco	0,80%	0,95%	0,89%	1,65%	1,06%
Coefficiente de Variação	11,11	16,33	12,94	10,85	11,44
Índice de <i>Sharpe</i>	0,02534	0,00682	0,01887	0,06068	0,0385
Beta IBOV	0,44514	0,50052	0,47899	0,97215	0,54809
R2	60,09%	54,36%	57,35%	68,52%	52,68%
Índice de <i>Treynor</i>	0,00046	0,00013	0,00035	0,00103	0,00074
Alpha de <i>Jensen</i>	0,00%	-0,01%	0,00%	0,06%	0,02%
VaR	-1,99	-2,39	-2,21	-4,009	-2,63
Índice de Sortino	0,0373	0,01057	0,02856	0,08684	0,05771
Nº de ativos	24	16	9	12	15

Fonte: Dados da pesquisa

Em relação a análise da carteira que minimiza o risco, pode ser constatado que o cluster 3 apresentou o menor coeficiente de variação, no valor de 10,85, quando comparado com os demais clusters. Este valor é menor mesmo quando comparado com a carteira de mínimo risco, CVM, a qual obteve um coeficiente igual a 11,11. O cluster 1 resultou em um CV de 16,33, cluster 2 de 12,94 e 11,44 no cluster 4, ou seja, verifica-se que há menos risco por unidade de retorno adicional na carteira cluster 3.

O cluster 3 apresentou um índice de Sharpe (IS) de 0,0607, ou seja, apresenta mais unidades de retornos por unidade de risco em relação aos demais clusters. O cluster 3, portanto, superou a CVM frente a este indicador, pois a mesma apresentou um resultado equivalente a 0,0269, ou seja, um aumento de 124,99%. O índice de *Treynor* demonstra quanto uma determinada carteira possui de retorno para cada unidade de risco sistêmico assumido, e quanto maior o valor melhor. Neste caso, o maior retorno é predisposto no cluster 3 (0,0010), seguido pela CVM (0,0005), cluster 4 (0,0007), cluster 2 (0,0003) e por último o cluster 1 (0,0001).

Na análise das carteiras que maximizam o índice de *Sharpe*, conforme dados da Tabela 5, identifica-se que a carteira que apresentou o menor Coeficiente de Variação foi a carteira de MAXIS (5,48), seguida pelo cluster 4 (5,76), cluster 3 (9,045), cluster 1 (9,0723) e cluster 2 (9,573). Houve um aumento no coeficiente de variação no que se diz respeito ao MAXIS referente ao clusters respectivamente de 4,84%, 39,39%, 39,58%, e 42,74%. Em relação ao índice de *Sharpe* o de maior valor refere-se a carteira de MAXIS (0,1467), em seguida o cluster 4 (0,140), cluster 3 (0,085), cluster 1 (0,073) e por último o cluster 2 (0,055). Em relação ao cluster 4 o MAXIS apresentou uma superioridade de 4,78%.

Tabela 5: Síntese dos resultados frente a teoria de máximo índice de Sharpe.

	Máximo índice <i>Sharpe</i>				
	MAXIS	Cluster 1	Cluster 2	Cluster 3	Cluster 4
Retorno	0,26%	0,15%	0,11%	0,23%	0,27%
Risco	1,45%	1,40%	1,06%	2,07%	1,56%
Coefficiente de Variação	5,4817	9,0723	9,5734	9,045	5,7604
Índice de <i>Sharpe</i>	0,1467	0,0731	0,0557	0,0856	0,1405
Beta IBOV	0,6295	0,7786	0,4673	1,2042	0,57
R2	43,82%	61,09%	37,98%	66,13%	26,12%
Índice de <i>Treynor</i>	0,0034	0,0013	0,0013	0,0015	0,0039
Alpha de <i>Jensen</i>	0,19%	0,07%	0,04%	0,13%	0,20%
VaR	-3,48	-3,44	-2,63	-5,12	-3,75
Índice de Sortino	0,23883	0,12215	0,08834	0,13668	0,22301
Nº de ativos	12	6	4	7	7

Fonte: Dados da pesquisa

Ao analisar o coeficiente Beta calculado referente ao IBOV é perceptível que apenas o cluster 3 na sub amostra de máximo índice de *Sharpe* apresentou beta superior a 1, ou seja, seu retorno esperado varia mais que o retorno do IBOV, as demais variam menos que o IBOV. Já o beta calculado relacionado a carteira de máximo IS nenhuma carteira varia mais que o MAXIS, pois nenhum resultado foi superior a 1.

Cabe ressaltar ainda que, no que se diz respeito ao R2, em ambas as abordagens o cluster 3 apresentou-se com valores superiores as demais carteiras, já o cluster 4 calculado frente ao máximo índice de *Sharpe* apresentou-se como o menor.

O alpha de Jensen quando se apresenta maior que zero indica que a carteira possui um retorno anormal, ou seja, maior que o valor esperado. Pensando nisso, pode-se perceber que dentre as carteiras de mínima variância cluster 1 e cluster 2 apresentaram resultados negativo e que dentre os demais o cluster três foi o que apresentou maior retorno anormal. Dentre as carteiras de máximo índice de Sharpe todas apresentaram valores positivos, e o cluster 4 e a carteira global, que apresentaram maiores valores, indicam que estas carteiras apresentam maior retorno anormal.

Um indicador de risco amplamente utilizado é o *Value-at-Risk* (VaR). O nível de confiança considerado neste caso foi de 5%, ou seja, calcular uma perda que não exceda 5%. Foi calculado o VaR diário para todas as carteiras consideradas, pode-se perceber que dentre os valores encontrados na primeira sub amostra o menor foi a da carteira CVM (-1,99%), seguido pelo cluster 2 (-2,21%), cluster 1 (-2,39%), cluster 4 (-2,63) e por último cluster 3 (-4,09%). Já na segunda sub amostra o menor valor foi encontrado no cluster 2 (-2,63%), cluster 1 (-3,44%), carteira de máximo índice de *Sharpe* (-3,48%), cluster 4 (-3,75%) e por último cluster 3 (-5,12%). Resultado este que corrobora com Rubesam, Beltrame (2013), que encontraram os menores VaRs médios nas carteiras de variância mínimas (CVM).

O índice de Sortino indica o retorno obtido para cada percentual de risco em excesso tomado pelo investidor e quanto maior seu valor melhor. Na abordagem de mínima variância o maior valor pode ser identificado no cluster 3 e na abordagem de máximo índice de Sharpe na carteira global, valor este muito próximo ao disposto no cluster 4.

A Tabela 6 apresenta a participação dos ativos de cada cluster frente a carteira de CVM e MAXIS, respectivamente.

Tabela 6: Participação de cada cluster frente a carteira de CVM e MAXIS

Mínima variância (CVM)				Máximo índice de <i>Sharpe</i> (MAXIS)			
cluster 1	cluster 2	cluster 3	cluster 4	cluster 1	cluster 2	cluster 3	cluster 4
30,8196%	52,9095%	0,1263%	16,1446%	11,1994%	-	17,6498%	71,1508%

Fonte: Dados da pesquisa

Referente aos clusters calculados frente a concepção da mínima variância é possível perceber que a maior parte dos pesos está no cluster 1 e no cluster 2, sendo que o cluster 3 foi o que apresentou o menor coeficiente de variação. Já pela concepção de máximo IS o cluster 4 obteve a maior participação 71,15%, que também apresentou valor superior para o índice de Sharpe. Esses resultados demonstram que os ativos com menores níveis de risco e de retorno, como demonstrados pelos clusters 1 e 2, contribuem com 83,71% do peso da carteira de variância mínima global da amostra estudada, e somente 16,27% do peso da carteira é alocado em ativos com níveis maiores de risco e retorno, como majoritariamente encontrado no cluster 4 (16,14%).

Estas evidências sugerem que os pesos otimizados bem como as correlações inferiores dos pares ativos possuem maior relevância entre ativos com riscos individuais inferiores. Além disso, verificou que apenas 11,19% da carteira que maximiza o índice de Sharpe é composta por ativos com riscos individuais e retornos menores, o que demonstra, de forma análoga e contrária ao encontrado na carteira de mínimo risco, que os pesos otimizados e correlações inferiores estão mais concentrados em ativos com maior nível de retorno e risco individual, quando se objetiva maximizar o índice de Sharpe.

Posteriormente foram plotados os gráficos de cada cluster a partir de seus riscos e retornos.

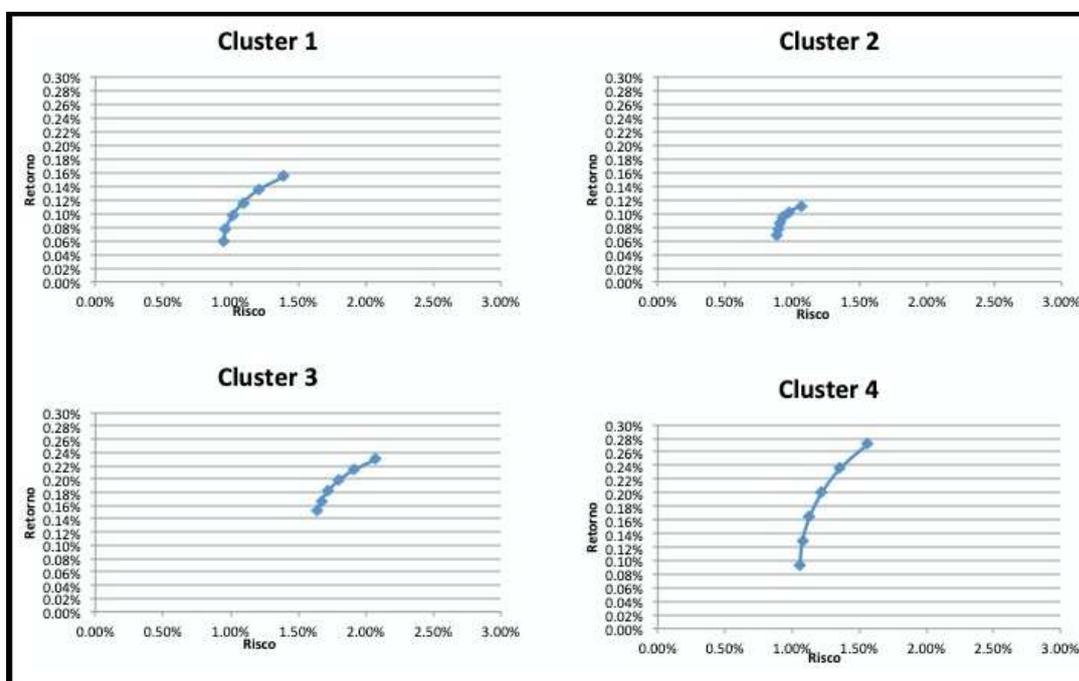


Figura 4: Fronteiras eficientes dos clusters 1, 2, 3 e 4.

Fonte: Dados da pesquisa

Identifica-se, por meio da Figura 4 que, dentre os clusters analisados, as carteiras que apresentam curvas consideradas mais eficientes, são os clusters 4 e 3, com pontos que

apresentam maiores retornos e relativamente com menores níveis de riscos. Dentre estes clusters, a curva considerada menos eficiente se deu pelo cluster 2.

A Tabela 7 apresenta a matriz de correlação dos clusters das carteiras de variância mínimas de cada cluster e a carteira global.

Tabela 7: Correlação dos clusters de mínima variância e carteira que inclui todos os ativos (CVM)

	CVM	Cluster 1	Cluster 2	Cluster 3	Cluster 4
CVM	1				
Cluster 1	0,8595	1			
Cluster 2	0,9083	0,6871	1		
Cluster 3	0,6493	0,6399	0,6215	1	
Cluster 4	0,7995	0,6603	0,6320	0,6334	1

Fonte: Dados da pesquisa

Há indícios, portanto, que os clusters 3 e 4 fazem parte da composição da carteira de variância mínima global por possuírem menores correlações entre seus ativos. Afinal a correlação do cluster 3 frente a CVM foi de 0,649 e do cluster 4 de 0,799, sendo estes valores os menores frente aos demais clusters.

A Tabela 8 faz a correlação do dos cluster de máximo índice de *Sharpe* e da carteira que inclui todos os ativos (MAXIS).

Tabela 8: Correlação dos cluster de máximo índice de *Sharpe* e da carteira que inclui todos os ativos (MAXIS)

	MAXIS	Cluster 1	Cluster 2	Cluster 3	Cluster 4
MAXIS	1				
Cluster 1	0,5468	1			
Cluster 2	0,4734	0,5772	1		
Cluster 3	0,5969	0,6006	0,5219	1	
Cluster 4	0,9599	0,4684	0,4368	0,4239	1

Fonte: Dados da pesquisa

Levando em consideração a Tabela 8, verifica-se que os clusters 2 e 1 possuem as menores correlações com a carteira MAXIS, o que já era esperado, uma vez que os clusters 3 e 4 possuem níveis maiores de índice de *Sharpe* em comparação com os clusters 1 e 2.

Os gráficos a seguir apresentam os retornos acumulados das carteiras analisadas. Foi desenvolvida uma simulação de investimento, assumindo que o valor inicial dos investimentos fosse equivalente a R\$ 1.000,00, com o intuito de analisar o desempenho das carteiras. A Figura 5 apresenta informações das carteiras de mínima variância, e das carteiras que maximizam o índice de *Sharpe*.

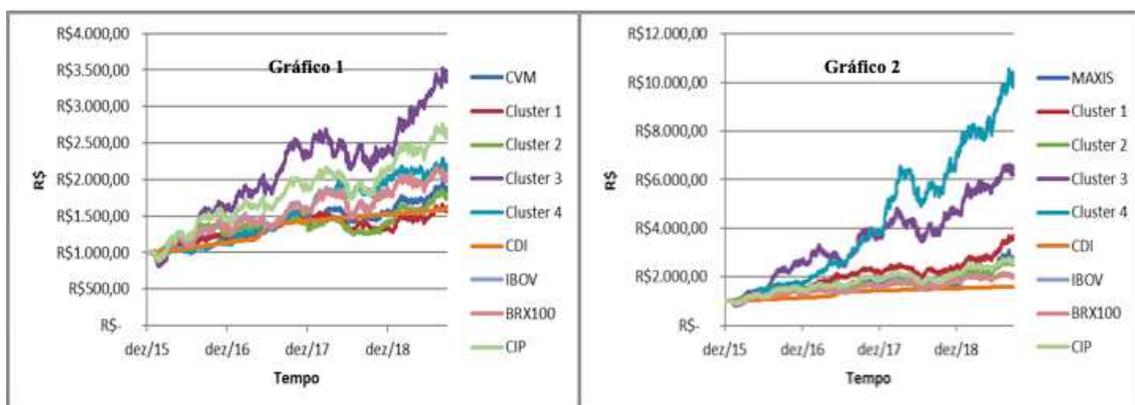


Figura 5: Desempenho das carteiras de mínima variância, IBOV, CIP e CDI (Gráfico 1) e das carteira de máximo índice de Sharpe, IBOV, CIP e CDI (Gráfico 2).

Fonte: Dados da pesquisa

Ao observar a Figura 5 (Gráfico 1), identifica-se que o cluster 3 sob a ótica do CVM se destacou frente as demais carteiras. Visto que, ao realizar um investimento de R\$ 1.000,00 em dezembro de 2015 o montante acumulado em agosto de 2019 seria de R\$3.485,98. A segunda carteira com maiores resultados é a CIP que apresentou um montante acumulado no final do período simulado de R\$ 2.693,40. Vale ressaltar que a carteira CIP é composta por 83 ativos e o cluster 3 por apenas 12, ou seja, a CIP se torna mais onerosa aos investidores pelo fato de possuir uma quantidade maior de ativos.

Referente as demais carteiras, em ordem decrescente dos montantes acumulados, verificam-se os cluster 4 (R\$ 2.195,36), IBRX100 (R\$2.078,08), IBOV (R\$2.061,83), CVM (R\$1.890,23), cluster 2 (R\$ 1.793,76), cluster 1 (R\$1.626,25) e o CDI (R\$1.597,22). Sendo assim, um investidor que optar pela carteira com maiores resultados, ou seja, o cluster 3, contrariamente ao CDI obterá um retorno superior de 118,25%.

Diferentemente da análise das carteiras de variância mínima, a Figura 5 (Gráfico 2) demonstra que o cluster 4 que apresentou um montante de R\$10.403,82, seguida da cluster 3 com um valor de R\$6.555,58, Cluster1 R\$3.682,26, o MAXIS 2.792,90 e o Cluster2 2.593,41. Identifica-se, nessa circunstância, que os cluster 4, 3 e 1, respectivamente, apresentam desempenho superior à carteira MAXIS. Visto que, comparando-se a carteira de maior resultado da abordagem anterior, com a obtida neste caso, é possível identificar um retorno superior de 198,45% (do cluster de MIS 4 referente ao cluster de CVM 3).

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo identificar a relação entre as diferentes combinações de risco e retorno de ativos individuais e a otimização de carteiras de investimentos no mercado brasileiro, segundo a abordagem de *Markowitz* (1952). Para isso, duas carteiras otimizadas foram analisadas: uma delas com a minimização da variância e a segunda sendo maximizada pelo índice de *Sharpe*, sendo que foram comparadas com carteiras otimizadas divididas em clusters agrupados por características homogêneas de risco e retorno dos ativos individuais.

No que tange as sub amostras otimizadas frente a maximização do índice de *Sharpe*, percebe-se que nenhum cluster conseguiu superar a carteira global de máximo índice de *Sharpe*, conforme já era esperado, pois a mesma apresentou IS superior a: 100,68% que o cluster 1, 163,38% que cluster 2, 61,38% que o cluster 3 e 4,41% que o cluster 4. De modo semelhante, e referente ao coeficiente de variação, a carteira de MAXIS apresentou um valor inferior que: 39,57% ao cluster 1, 42,74% ao cluster 2, 39,39% ao cluster 3 e 4,84% inferior ao cluster 4, o

que também já era esperado. Dentre as sub amostras, destacou-se o cluster 4 o qual apresentou-se com o menor CV, maior IS e maior índice de *Treynor*. Obteve ainda, a maior participação na carteira global de máximo índice de *Sharpe* um total de 71,15%.

Os resultados evidenciaram que na sub amostra de mínima variância, o cluster 3, que possui maior nível de índice de *Sharpe*, ou seja, 789,74% maior que o cluster 1, 221,57% superior ao cluster 2 e 57,61% maior que o cluster 4, possui o peso menor na minimização do risco da carteira global, sendo 0,1263%. No entanto, minimizar o risco no cluster 3 proporciona maior prêmio por risco sistêmico e maior esperança de retorno por unidade de risco, evidenciado pelo índice de *Treynor*, que se apresentou com o maior valor dentre os demais (0,0010), seguido pela CVM (0,0005), cluster 4 (0,0007), cluster 2 (0,0003) e por último o cluster 1 (0,0001). Obteve o menor coeficiente de variação, no valor de 10,85, quando comparado com os demais clusters. Este valor é menor mesmo quando comparado com a carteira de mínimo risco, CVM, a qual obteve um coeficiente igual a 11,11. Apresentou o maior IS de 0,0607, superou a CVM frente a este indicador, com um aumento de 124,99%.

Enfim, foi possível encontrar resultados considerados superiores aos indicadores da carteira de risco mínimo global, com um índice de *Sharpe* 124,99% superior à CVM, R2 8,52% maior e um CV 2,34% inferior. Ou seja, verifica-se que minimizar a variância de ativos com níveis maiores de risco e retorno, como é o caso do cluster 3, permitiu triplicar o índice de *Sharpe* em relação a CVM. Além do índice de *Sharpe* superior, o cluster 3 é considerado superior aos demais em outros indicadores. Por exemplo, verifica-se por meio do *Beta* que minimizar o risco da carteira do cluster 3 permitiu encontrar o menor risco sistêmico (*Beta*) o que está em linha com o resultado de Rubesam, Beltrame (2013). Também, verificou-se que o *alpha* de *Jensen* da carteira cluster 3, de mínima variância, sugere que é possível minimizar o risco com um retorno considerado anormal. Outro aspecto que mostra superioridade da carteira composta pelo cluster 3, a mesma apresenta metade da quantidade de ativos da carteira global de mínima variância.

Finalmente, após a comparação conjunta das carteiras analisadas, observa-se que agrupar os ativos com características de risco e retorno permitiu identificar resultados considerados relevantes ao investidor. Especificamente, segregar os níveis de eficiência individual dos ativos se mostrou uma estratégia que beneficia aos investidores que desejam retornos superiores e com risco mínimo. Faz-se necessário que mais pesquisas são recomendadas para validar ou confrontar os resultados encontrados nesta pesquisa. Sugere-se que novos agrupamentos de ativos sejam testados, com amostras com quantidade e períodos distintos, especialmente que busquem verificar qual é a contribuição de ativos com risco e retornos considerados ineficientes na formação de carteiras otimizadas.

REFERÊNCIAS

- AMORIM, A.L.G.C.; LIMA, I.S. MURCIA.F.D. Análise da relação entre as informações contábeis e o risco sistemático no mercado brasileiro. **Revista Contabilidade & Finanças**, v.23, n.60, p.199-211, 2012.
- BARCELOS, F. B.; HAMACHER, S.; PACHECO, M. A. Determinação da fronteira de eficiência através da estratégia de Pareto: aplicação em carteiras de projetos de petróleo e gás. **XXXV SBPO**. Rio de Janeiro, 2003.
- BEM, J.S; GIACOMINI, N.M.R; WAISMANN,M. Utilização da técnica da análise de clusters ao emprego da indústria criativa entre 2000 e 2010: estudo da Região do Consinos, RS. **Interações**. v. 16, n. 1, p. 27-41, jan./jun. 2015.

BM&FBOVESPA – **Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros do Estado de São Paulo**. Índice Brasil – IBRX. Disponível em: < <http://www.bmfbovespa.com.br/indice>>. Acesso em: 08 de out. 2019.

BRUNI, A; FAMÁ, R. Mercados eficientes, CAPM e anomalias: uma análise das ações negociadas na Bovespa (1988-1996). **Anais do III SemeAd**- Seminários de Administração da FEA/USP, 1998.

CAVALCANTE, D.M; CRISÓSTOMO, V.L; MATOS, P.R.F; NETO, J.F.C. Composição de carteiras por mínima variância: comparação com *benchmarks* de mercado. **Revista Gestão, Finanças e Contabilidade**, v.6, n.2, p.132-159, 2016.

FARIAS, T. A; MOURA, F. R. Carteiras eficientes e ingênuas: uma análise comparative com o uso do modelo de Markowitz. **Revista de Economia Mackenzie**, v. 11, n.2, São Paulo, 2013.

MARKOWITZ, H. M. Portfolio Selection. **The Journal of Finance**, v. 17, Março, 1952.

LEAL, R.P.C.; CAMPANI, C.H. Índices valor-coppead, carteiras de ponderação igualitária e de mínima variância. **Revista Brasileira de Finanças**. Rio de Janeiro, v.14, n.1, p.45-64, mar.2016.

MARQUES, S.; SILVA, W. V.; DEL CORSO, J. M.; DALAZEN, L. L. Comparação de Desempenhos de Carteiras Otimizadas pelo Modelo de Markowitz e a Carteira de Ações do IBOVESPA. **Revista Evidenciação Contábil & Finanças**. João Pessoa, v.1, n. 1, p. 20-37, jan./jun. 2013.

OLIVEIRA, M.R.G.; CARVALHO, K.S.; ROMA, C.M. S. Otimizando uma carteira de investimentos: um estudo com ativos do Ibovespa no período de 2009 a 2011. In: **Simpósio Brasileiro de Engenharia de Produção**, XVIII, São Paulo, 2011.

RUBESAM, A.; BELTRAME, A.L. Carteiras variância mínima no Brasil. **Revista Brasileira de Finanças**, Rio de Janeiro, v.11, n.1, p.81-118, mar.2013.

SOUZA, L. C; MASSARDI, W.O; PIRES, V.A.V; CIRIBELI, J.P Otimização de carteira de investimentos: um estudo com ativos do IBOVESPA. **Revista de Gestão, Finanças e Contabilidade**, v. 7, n. 3, p. 201-213, 2017.

VALLE, M. R. do; TEIXEIRA, S. C. Associação entre beta contábil e beta de mercado: análise para o mercado financeiro brasileiro. **Revista de Informação Contábil**, Recife, v. 2, n. 3, p. 1-21, 2008.