

**Análise da oferta ideal de contratos de resseguro utilizando métodos de otimização condicionada**

**THIAGO ARAUJO SANTIAGO**

FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO - FEA

**JOÃO VINÍCIUS DE FRANÇA CARVALHO**

FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO - FEA

## Análise da oferta ideal de contratos de resseguro utilizando métodos de otimização condicionada

### Resumo

Em mercados cada vez mais interligados, a avaliação dos riscos aos quais uma companhia está exposta é fundamental para uma maior competitividade. Para resseguradoras é essencial otimizar sua exposição ao risco, pois elas estão sujeitas a eventos de severidade extrema. O objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo de otimização que encontre o nível de retenção ótimo por classe de negócio em contratos do tipo *quota-parte*, por meio de um algoritmo de otimização estocástica não-linear capaz de obter a melhor relação risco-retorno da carteira. O algoritmo foi avaliado em dois cenários: (i) supondo independência; e (ii) impondo uma estrutura de dependência entre as classes de negócio. Inicialmente ajustou-se a distribuição probabilística que refletisse o padrão de severidades, em seguida, foram reproduzidos 1000 cenários do modelo de otimização e obtidas três informações: (i) os resultados operacionais, (ii) os CVaR a 99,5% de confiança, e; (iii) as retenções que conduziam ao resultado ideal. Os resultados para o caso independente sugerem que as linhas com menores oscilações na severidade ou com menores índices combinados apresentam maior capacidade de retenção de riscos. Por outro lado, quando se inclui uma estrutura de dependência, os resultados operacionais aumentam, mas ao custo de elevar a exposição da companhia a eventos extremos.

**Palavras-chave:** Resseguro; Otimização de portfólio; Diversificação; Gerenciamento de Riscos; Programação Não-Linear.

### 1. Introdução

Em finanças, estudos de otimização de carteiras é recorrente em trabalhos acadêmicos, além de possuir grande aplicação prática. Desde o trabalho seminal de Markowitz (1952), que introduziu o modelo de média e variância, inúmeros trabalhos sobre o tema vem sendo desenvolvido nas últimas décadas (Rockafellar & Uryasev, 2000, 2002; Roman & Mitra, 2009) tentando relacionar um nível ótimo (no sentido de ser a melhor ou pior situação possível, dentre uma infinidade de cenários) de retorno associado a uma medida de risco, dado um conjunto de restrições.

Já na indústria de seguros, a gestão de riscos de sua carteira é de fundamental importância, pois, no final das contas, trata-se da sobrevivência ou não do seu negócio. Este assunto se torna ainda mais relevante em cenários de crises financeiras, mais frequentes nas últimas décadas (Carvalho & Chiann, 2013), a gestão de riscos tornou-se um grande foco em processos regulatórios voltados para empresas do setor securitário, como em *Solvency II* – diretiva da União Europeia – que tem como objetivo assegurar e monitorar a solvência das seguradoras para proteger os segurados, impondo requisitos de capital regulatório com base em medidas de risco. Portanto, a aplicação de métodos quantitativos e modelos de mitigação de riscos tornou-se de vital importância para as seguradoras, bem como para órgãos reguladores e agências de *rating*, para os quais a quantificação do risco é utilizada para obter o capital de solvência requerido.

Diante deste cenário, mecanismos de compartilhamento de riscos desempenham papel fundamental neste sistema. O resseguro é um deles. Trata-se de um contrato de transferência de parte da responsabilidade financeira de uma seguradora sobre um evento de alta severidade para uma companhia resseguradora. Ao fazer isso, a seguradora cedente se protege do risco de grandes variações nas obrigações assumidas, reduzindo assim o volume de capital necessário para cobri-las. Porém, realizar esta transferência de responsabilidade sobre um risco tem um preço, o *prêmio de resseguro cedido*. Portanto, nesta relação existe um conflito de interesses em que cada contraparte tenta maximizar o seu resultado por meio deste processo de

transferência e retenção de risco. Trabalhos como Hürlimann (2011) e Cai, Lemieux, & Liu (2016) analisaram esta relação entre seguradora e resseguradora e tentaram obter uma estrutura ótima de um contrato de resseguro. Já Bernard & Tian (2009) analisaram o contrato de resseguro ótimo frente aos requerimentos de capital regulatório, utilizando medidas quantílicas para avaliação e mensuração do risco.

No entanto, a otimização do ponto de vista da carteira de (res)seguros como um todo é mais recente, apresentando apenas algumas abordagens teóricas (Sun, Weng, & Zhang, 2017) e poucas abordagens empíricas (Rasmusson, 2014). No Brasil, não foi identificado nenhum trabalho que abordasse este tema sob a ótica de otimização de carteiras de (res)seguros.

Quando observados os números do mercado ressegurador, verifica-se sua importância. No Brasil, segundo o “*Terra Report*”<sup>1</sup> referente ao ano de 2018, o volume de prêmios de resseguro cedido pelas seguradoras brasileiras (mercado regulado SUSEP) foi equivalente a cerca de R\$ 12 bilhões. Globalmente, estas cifras são muito maiores: em 2017, os prêmios subscritos pelas 40 maiores resseguradoras do mundo foram da ordem de US\$ 231 bilhões<sup>2</sup>.

Tendo como base a relevância financeira deste setor e a escassez de literatura nacional sobre o tema, o objetivo central deste trabalho é desenvolver um modelo de otimização que encontre o nível de retenção ótimo de uma resseguradora, maximizando seu resultado de subscrição sujeito a restrição de medidas de risco, a partir de diferentes estruturas de dependência entre os diferentes grupos e ramos de atuação, cada um com sua dinâmica própria. Uma aplicação será feita utilizando microdados de uma resseguradora local atuante no Brasil. O presente trabalho inova ao propor (i) a incorporação da estrutura de dependência entre as classes de negócios, possibilitando avaliar possíveis efeitos de diversificação na oferta ideal, e; (ii) utilizar o *Conditional Value at Risk* como medida quantílica de risco no modelo de otimização condicionada para resseguradoras.

## 2. Fundamentação teórica e literatura empírica

Os modelos de otimização de portfólio possuem origem na década de 1950 (Markowitz, 1952), com o modelo de média-variância que relaciona uma medida de risco associada a uma expectativa de retorno. Nas décadas mais recentes, um debate grande vem sendo tratado em relação a qual medida de risco é a mais apropriada para modelagem de riscos financeiros. Um importante marco foi o relatório técnico *Risk Metrics* do JP Morgan, que em 1996 estabeleceu o uso do VaR (*Value-at-Risk*) como medida para a mensuração de riscos financeiros. Desde então, esta métrica vem sendo utilizada pelo mercado como parâmetro nos modelos internos de gerenciamento de risco e de adequação aos níveis de capital regulatório estabelecidos por tratados como Basileia III e *Solvency II*. Porém, o uso do VaR como medida de risco possui uma série de desvantagens, por não ser uma medida que possua boas propriedades (Artzner, Delbaen, Eber, & Heath, 1999). Por este motivo, foi desenvolvida uma métrica alternativa ao VaR, dotada de significado similar (Rockafellar & Uryasev, 2000, 2002), mas que possuísse propriedades adequadas. Esta medida ficou conhecida como CVaR (*Conditional Value at Risk*).

Em Tyrrell, Rockafellar & Uryasev (2000) é implementado um algoritmo similar aos modelos de média-variância que busca minimizar o nível de retorno esperado de um portfólio de instrumentos financeiros, por meio de um problema de programação linear, utilizando o CVaR como medida de aversão ao risco (e, de fato, é disso que se trata). Um dos resultados obtidos mostrou que carteiras com CVaR pequeno também possuem um VaR pequeno.

---

<sup>1</sup> Disponível em: <http://www.terraabris.com.br/terra-report-brasil/> Acesso em 01/05/2019.

<sup>2</sup> Disponível em: [https://www.spratings.com/en\\_US/topic/-/render/topic-detail/global-reinsurance-highlights](https://www.spratings.com/en_US/topic/-/render/topic-detail/global-reinsurance-highlights) Acesso em 01/05/2019.

Outra abordagem importante e recorrente em finanças e em gerenciamento de riscos para a gestão de portfólios, são as aplicações de ALM (*Assets and Liabilities Management*). Por meio desta técnica, não apenas os ativos e os investimentos são estimados, mas também as obrigações futuras assumidas pela empresa. Nos modelos de ALM, o casamento do fluxo de ativos e passivos é de fundamental importância para a redução dos riscos de liquidez e de mercado. Além disso, a alocação apropriada dos ativos podem maximizar a rentabilidade do portfólio dado um nível esperado de risco, similar aos modelos de Risco – Retorno citados anteriormente. Em Saad & Ribeiro (2004), foi avaliada a aplicação de modelos de ALM em fundos de pensão. Já em Mostafa, Driss, & Mohammed (2018), foi utilizado o VaR como restrição em um modelo ALM para seguradoras analisando a sensibilidade do modelo à flutuações na taxa de juros.

Lógica similar pode ser implementada na indústria de (res)seguros, onde o estudo do contrato ótimo de resseguro é um problema clássico que remete aos trabalhos de Borch (1960) e Arrow (1963), nos quais foi provada a otimalidade, do ponto de vista da seguradora, do resseguro do tipo *stop-loss*. Sob este tipo de tratado, minimiza-se a variância do prêmio retido (líquido de prêmio de resseguro), assim como maximiza-se a utilidade esperada da seguradora, em condições de aversão ao risco.

Recentemente, Cai & Tan (2007) calculam a retenção ótima de um *stop-loss* considerando VaR e CVaR como medidas de riscos restritivas à função objetivo. Cai, Tan, Weng, & Zhang (2008) ampliam o trabalho anterior generalizando suas análises para outras estruturas de contratos de resseguro, mostrando que estas também podem ser otimizadas utilizando uma medida quantílica para a mensuração da aversão ao risco de uma seguradora. Já em Balbás, Balbás, & Heras (2009) é analisada a otimalidade de um contrato de resseguro em relação a medidas mais gerais de risco. Neste artigo os autores desenvolvem as condições de convexidade e coerência que uma medida de risco deve atender para que o processo de otimização resulte em valores ideais para um contrato de resseguro. Ademais, os autores desenvolvem o caso particular do resultado com o CVaR, provando que esta medida respeita as condições de coerência.

Todos estes trabalhos avaliaram a estrutura de resseguro ótima do ponto de vista da cedente (seguradora). Contudo, por se tratar de uma relação bilateral, é importante avaliar a otimalidade do ponto de vista tanto da seguradora como da resseguradora. Trabalhos como Hürlimann (2011) e Cai et al. (2016) buscaram otimizar o contrato de resseguro observando as preferências e aversão ao risco de ambas. Especificamente em Cai et al. (2016), este contrato ótimo é obtido quando a combinação das medidas de risco, mensuradas pelo VaR, da seguradora e da resseguradora é minimizada. Vale ressaltar que esta otimização se torna cada vez mais complexa quando um novo participante é inserido na análise. Ou seja, analisar a combinação de diferentes seguradoras e resseguradoras em conjunto é um problema muito mais complexo que a análise individual de cada uma delas.

Em comum aos trabalhos citados, tem-se a avaliação do problema utilizando-se a distribuição do sinistro agregado, que pode ser modelado como uma soma aleatória de eventos aleatórios (sinistros individuais) de uma carteira da (res)seguradora, em que os eventos são considerados independentes e identicamente distribuídos. Ademais, costuma-se utilizar apenas um tipo de contrato de resseguro para a cobertura de toda a carteira. Todavia, na prática, estas empresas operam em diversas linhas de negócios, com características muito específicas para cada ramo de atuação e, não menos importante, há uma estrutura de dependência subjacente entre elas que adiciona complexidade à análise, pois ignorar estas estruturas pode gerar avaliações equivocadas quanto à exposição real a riscos da companhia.

De Moura (2017) avaliou, do ponto de vista da cedente, a combinação ótima de uma estrutura de resseguro híbrida, composta por contratos *quota share* e *stop-loss*, para dois riscos dependentes. Neste trabalho, a estrutura de dependência é estimada por meio de Cópulas. Por sua vez, Yuen, Liang, & Zhou (2015) avaliaram um modelo de resseguro proporcional ótimo na presença de choques comuns entre as diversas linhas de negócios.

Em Sun et al. (2017) é apresentado um modelo não-paramétrico que busca otimizar o portfólio de uma seguradora utilizando um resseguro proporcional para diversas linhas de negócio, com uma determinada estrutura de dependência. Para tanto, os autores buscaram maximizar o resultado operacional da seguradora, impondo um limite máximo para um nível de aversão ao risco mensurado pelo CVaR.

Em um raro caso em que há o emprego de microdados, Rasmusson (2014) implementou um modelo similar ao de Sun et al. (2017), mas utilizando dados reais do portfólio da resseguradora sueca Sirius International. Neste trabalho, foi desenvolvido um problema de programação linear que objetivou otimizar o resultado operacional da resseguradora, buscando a melhor estrutura de retrocessão possível. Nesta estrutura, foi avaliada a estratégia de retenção ideal para o portfólio de um ano da resseguradora em suas diversas unidades de operação (*Business Units*, BU), condicionada a um nível de risco alvo, medido pelo CVaR. Além disso, foram estabelecidas as restrições quanto ao limite de cessão (impossibilidade de ceder mais que 70% do portfólio por BU), bem como não poder reter mais do que 100% de um risco em determinada BU (impossibilidade do aumento do portfólio por subscrição). Portanto, o objetivo deste trabalho consistiu em diversificar os riscos do portfólio da resseguradora em âmbito geográfico.

Diante deste quadro, o presente trabalho pretende expandir a literatura nacional do tema, que é virtualmente inexistente, adotando estratégia metodológica similar a de Rasmusson (2014), mas ampliando o escopo para a obtenção da melhor estratégia de subscrição, ao levar em consideração a estrutura de dependência do portfólio, bem como as diferentes linhas de atuação no mercado segurador brasileiro.

### 3. Metodologia

#### 3.1. As medidas de risco

Em problemas de otimização é necessária a construção de um espaço que contenha todos os resultados possíveis, dentro do qual haja um resultado que conduza a uma configuração que torne a sua situação a melhor possível. Em um ambiente de incerteza, é imprescindível que se utilize de medidas de risco que expresse a aversão a eventos indesejáveis, pois somente assim é possível avaliar uma decisão ponderando-a à sua exposição ao risco.

As medidas de risco desejáveis devem ser uma função que mapeia uma variável aleatória  $X$ , representando os eventos indesejáveis, a um número real (Kaas, Dhaene, & Leuven, 2008). A forma que este funcional assume pode variar a depender do contexto e propósito da análise, uma vez que não há uma medida de risco universal capaz de captar de maneira apropriada e simultânea os quatro momentos de uma distribuição de probabilidade (Gonçalves, 2008).

Uma medida comumente adotada pelo mercado devido sua facilidade de interpretação e mensuração é o valor em risco (*VaR*), que pode ser entendido como a perda máxima esperada, em um certo período de tempo, dado um intervalo de confiança  $\alpha$ . Sendo  $X$  uma variável estocástica e  $F(X)$  uma função distribuição (acumulada) de probabilidade de  $X$ , então é possível definir  $VaR_\alpha(X)$  como:

$$VaR_\alpha(X) = F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R}: F(x) \geq \alpha\}. \quad (1)$$

Porém, o VaR não é considerada uma medida coerente. Segundo Artzner et al. (1999), uma medida de risco é considerada coerente se satisfizer a quatro axiomas (subaditividade, monotonicidade, homogeneidade positiva e invariância de translação). Contudo, o VaR falha em satisfazer ao axioma da subaditividade, sob o qual a soma das medidas de risco dos ativos individuais deve ser maior ou igual à medida de risco da carteira (efeito de diversificação).

Uma medida coerente alternativa ao VaR, e que mantém interpretação similar, é o CVaR (*Conditional VaR*). Rockafellar & Uryasev (2000) provam que, em um problema de programação linear, otimizar o CVaR equivale a também otimizar o VaR. Logo é possível assumir que o CVaR pode ser utilizado nos problemas em que a aversão ao risco é mensurada pelo VaR mantendo interpretação similar.

O CVaR pode ser interpretado como a perda esperada além do limiar  $VaR_\alpha(X)$ , levando em consideração, inclusive, a pior perda possível (algo que o VaR ignora). A Equação 2 traz a sua definição.

$$CVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(X) du \quad (2)$$

### 3.2. A função-objetivo

Uma vez definida a medida de risco que restringirá a função-objetivo, agora será apresentado o modelo que representa o resultado técnico de um contrato de resseguro. A Equação 3, a seguir, traz a dinâmica do processo que rege o resultado operacional ( $RO$ ) de uma entidade de (res)seguros.

$$RO = P - S - C \quad (3)$$

em que  $P$  representa o volume total de prêmios de (res)seguro,  $S$  é o total despendido com o pagamento de sinistros, e  $C$  denota as comissões de (res)seguro pagas.

Inicialmente, será considerado apenas o contrato de resseguro proporcional do tipo *quota-share*, inclusive para ser possível a comparação dos resultados obtidos por Rasmusson (2014), que utilizou metodologia similar. Porém, aqui será avaliado o resultado de subscrição da resseguradora e não sua estrutura de retrocessão. Assim, para um contrato proporcional o resultado operacional pode ser expresso pela Equação 4.

$$RO(q) = q(P - S - C), \quad (4)$$

em que  $q$  representa a parcela do risco retido pela resseguradora, sendo  $0 \leq q \leq 1$ , e todos os demais termos são idênticos aos apresentados na Equação 3. É preciso ressaltar o caráter aleatório de  $RO(q)$ : como comentado antes, os sinistros são sempre apurados ao final do período. Por isso, o seu valor exato não é conhecido quando se define a política ideal de prêmios ( $P$ ) e, por consequência, o valor das comissões ( $C$ ), que é determinado pelo volume  $P$ . Portanto, é de suma importância formar boas estatísticas que permitam correta inferência a respeito do risco a que a entidade está exposta por realizações possíveis da variável aleatória  $S$ , o sinistro agregado, que é resultado de uma convolução de variáveis aleatórias.

### 3.3. O problema de otimização a ser resolvido

Definida a função-objetivo como o resultado técnico de subscrição da resseguradora, esta deverá ser otimizada (maximizada), dado um nível de risco definido como  $CVaR_\alpha$ , onde  $\alpha$  deve representar o nível de aversão ao risco da resseguradora, aqui neste trabalho será utilizado para fins de simulação  $\alpha = 99.5\%$ . Portanto, o problema de otimização condicionada para contratos proporcionais pode ser definido como:

$$\begin{aligned}
& \max_{(q_1, q_2, \dots, q_\lambda)} E(X) \\
& \text{sujeito a} \\
& 0 \leq q_\lambda \leq 1 \\
& CVaR_\alpha(X) \leq CVaR_\alpha(R_{\text{Portfolio atual}}) \\
& X = \sum_{\lambda=1}^L q_\lambda (P_\lambda - S_\lambda - C_\lambda),
\end{aligned} \tag{5}$$

em que  $\lambda$  representa cada um dos L diferentes ramos de atuação da resseguradora.

### 3.4. Procedimento metodológico

O algoritmo de simulação utilizado neste trabalho é análogo ao utilizado por Rasmusson (2014). Contudo, dois elementos básicos tornam o presente artigo substancialmente diferente do trabalho do autor. Primeiro, seu objetivo era avaliar a retrocessão ótima. Aqui, a avaliação será feita do ponto de vista da retenção ótima do processo de subscrição da resseguradora. Além disso, neste procedimento é incorporada a matriz de correlação entre os ramos, com o objetivo de avaliar o efeito de diversificação dos portfólios no problema de otimização.

Para a execução do modelo de otimização descrito na seção anterior, são estimadas as distribuições empíricas de prêmios e sinistros por linha de negócio. Estas distribuições devem representar os prêmios e sinistros brutos, ou seja, antes do contrato de resseguro *quota-share*. Após a obtenção das densidades estimadas para o resultado operacional, é aplicada a atual retenção da resseguradora por linha de negócio e, sobre o resultado, medido o  $CVaR_\alpha$  do portfólio atual da resseguradora. Esta medida deve representar o nível-alvo da exposição ao risco por parte da companhia.

Estimadas as distribuições de probabilidade – tanto de prêmios como de sinistros, e também do resultado operacional –, são simulados 10.000 cenários aleatórios, para cada ramo, com o intuito de obter diferentes configurações que melhor representem o portfólio da resseguradora.

Dentre os 10.000 cenários simulados, são selecionadas 1.000 amostras aleatórias com reposição. Em cada uma das 1.000 amostras, é calculada a retenção ótima por ramo, representado pelo vetor  $(q_1, q_2, \dots, q_\lambda)$ , que maximiza o esperança do resultado operacional  $E(X)$ , condicionado ao nível de risco  $CVaR_\alpha$  definido pela resseguradora.

O binômio formado por  $CVaR_\alpha(X) - E(X)$  de cada simulação deve representar a relação *risco-retorno* ótima para a configuração de portfólio amostrada. Desta maneira, é possível comparar os resultados obtidos com a performance do portfólio atual da resseguradora, dado o nível de aversão ao risco  $CVaR_\alpha$ .

## 4. Análise de Resultados

Esta seção tem como objetivo apresentar as principais características descritivas observadas no portfólio, bem como avaliar as distribuições de probabilidade que melhor se ajustam aos dados observados e, por fim, analisar os resultados obtidos pela implementação do algoritmo de otimização descrito na seção 3.

Serão considerados dois cenários: (i) assumindo independência entre os grupos, e; (ii) considerando uma estrutura de dependência. Com isto será avaliado o comportamento da solução ótima sob estas 2 premissas.

### 4.1. Base de dados e estatísticas descritivas

A base utilizada contém as informações de sinistros incorridos, prêmios ganhos e comissões de resseguro pagas referente a 2.179 contratos proporcionais de resseguro

(facultativos e automáticos), vigentes no período compreendido entre 01/01/2008 e 30/06/2019. Visando uniformizar a exposição ao risco, e de modo a tornar todas as apólices dos diferentes ramos comparáveis, os dados foram ajustados para a mesma base de duração anual. Além disso, foram atualizados a valor presente de jun/2019 para realizar a comparação de contratos em diferentes períodos do tempo, utilizando o IPCA, índice oficial de inflação do Brasil.

Portanto, ao final da homogeneização dos dados é possível comparar (individual e coletivamente) a relação *risco-retorno* de cada contrato de resseguro, diferenciando-os apenas quanto à linha de negócio a qual ele está exposto. Portanto, o tratado de resseguro é o único fator a influenciar na decisão de reter ou não o risco na carteira da companhia resseguradora.

Os contratos analisados correspondem a 9 grupos de ramos SUSEP, reagrupados em 8 classes de negócios conforme a classificação disposta na Resolução CNSP n.º 321/2015. As estatísticas descritivas de prêmios e sinistros por classe de negócios são dispostas na Tabela 1.

**Tabela 1** – Estatísticas descritivas

Classe de Negócios	Contratos	Retenção Média	Prêmio médio	Prêmio Máximo	Severidade Média	Severidade Máxima	Desvio Padrão da Severidade
1	1.128	16,0%	830.371	15.708.659	- 916.904	- 29.084.016	2.362.248
2	295	17,8%	310.568	4.157.516	- 265.959	- 9.224.740	881.502
3	147	18,5%	517.472	23.342.686	- 651.787	- 10.208.798	1.664.471
4	78	22,1%	4.389.180	71.895.476	-3.181.850	- 39.314.025	7.254.562
5	97	20,6%	1.995.095	33.117.903	-1.708.641	- 20.470.848	3.133.777
6	315	23,0%	1.689.253	33.537.798	-1.053.399	- 34.630.804	3.386.871
7	92	22,4%	9.355.005,4	164.594.075	-7.524.273	- 159.357.732	21.868.933
8	27	22,3%	4.373.544	16.885.651	-3.347.710	- 14.434.109	4.186.635

Fonte: Elaborado pelos autores.

Pela Tabela 1, percebe-se que cada classe de negócio possui características próprias relacionadas a sua participação no portfólio da companhia, seja em número de apólices (o grupo 1, por exemplo, corresponde por cerca de 52% da carteira) ou em prêmios médios (o grupo 7, apesar da baixa participação em números de apólices, possui um prêmio médio 11 vezes maior que o grupo 1). Estas características diferentes observadas nos prêmios também podem ser observadas nos sinistros, em que as severidades média e máxima são muito distintas inter-classes, refletindo em diferentes magnitudes dos desvios-padrões observados.

Apesar de as estatísticas descritivas revelarem importantes características relacionadas ao atual portfólio da companhia, não é possível fazer qualquer inferência baseando-se exclusivamente em métricas descritivas. Para uma análise minuciosa, é necessário resolver estocasticamente o problema de otimização descrito pelo conjunto de equações 5. Desta maneira, é importante estimar a distribuição probabilística dos sinistros (a principal variável aleatória envolvida) mais aderente a cada linha de negócio, pois, assim, será possível considerar uma infinidade de situações que potencialmente poderiam ter sido observadas no portfólio com o mesmo padrão de ocorrência, não apenas considerando os poucos sinistros observados.

Portanto, após o tratamento das informações disponíveis e do agrupamento por classe de negócio, procedeu-se com o ajuste da distribuição paramétrica para a severidade individual mais aderente às características dos sinistros de cada grupo, bem como foram estimados os parâmetros para cada distribuição, a fim de gerar sinistros aleatórios (não observados) para a otimização do portfólio. Além disso, foram estimadas também as distribuições *bootstrap* dos sinistros médios, com o objetivo de observar o comportamento dos sinistros esperados das distribuições empíricas, para o caso de as distribuições paramétricas não serem aderentes ou gerar valores muito fora dos padrões.

Foram nove os modelos paramétricos ajustados para a severidade individual: Exponencial, Gama, Normal, Log Normal, Weibull, Weibull Inversa, T-Student, Log Logística e Pareto. Os parâmetros foram estimados por máxima verossimilhança. A distribuição escolhida foi aquela que minimizou o Critério de Informação Bayesiano (BIC). Os resultados das estimativas dos parâmetros estão dispostos na Tabela 2.

**Tabela 2** – Distribuições ótimas e seus parâmetros estimados

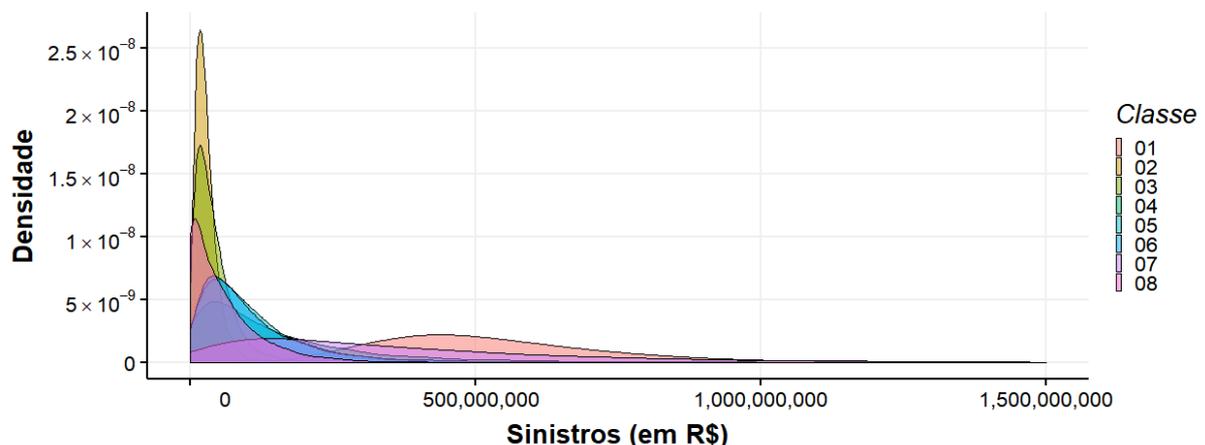
Classe de Negócios	Distribuição	Parâmetro 1	Parâmetro 2
1	Weibull	0,433936	564.640,10
2	Weibull	0,520879	217.917,80
3	Weibull	0,529139	530.508,50
4	Weibull	0,477298	2.122.986,00
5	Weibull	0,539624	1.632.997,00
6	Weibull	0,367832	460.576,00
7	Weibull*	0,499305	579.058,00
8	Weibull	0,747057	4.723.423,00

\* Foi escolhido o ajuste por uma Weibull, em vez da Log-Logística, em função de geração de outliers excessivos da Log-Logística.  
Fonte: Elaborado pelos autores.

Pela Tabela 2, a distribuição mais aderente aos dados é uma Weibull, tipicamente apropriada para valores extremos. Por esta razão, este resultado já era esperado considerando a característica intrínseca do modelo de negócios de uma resseguradora, cujos sinistros observados apresentam alta severidade, que excedem a capacidade operacional de entidades seguradoras, com frequência não desprezível.

Vale ressaltar que outras distribuições como Log-Normal, Pareto e Log-Logística obtiveram boa pontuação de ajuste de acordo com o BIC. Ao avaliar o Grupo 7, nota-se que a distribuição Log-Logística obteve o melhor BIC. Contudo, por meio de uma análise qualitativa, observou-se que esta distribuição gerava *outliers* (sinistros de altíssima severidade) muito superiores à atual exposição da resseguradora. Portanto, optou-se por utilizar a distribuição Weibull, que apresentou um BIC próximo ao da Log-Logística mas com a vantagem de gerar sinistros com ordem de grandeza compatível com a atual exposição desta linha.

**Figura 1** – Distribuições Weibull estimadas para cada Classe de Negócios



Fonte: Elaborado pelos autores.

Após a estimação das distribuições probabilísticas, geraram-se 10.000 cenários aleatórios reproduzindo o atual portfólio de 1 ano da resseguradora por linha de negócio utilizando a técnica de reamostragem *bootstrap*, com o objetivo de comparar a exposição ao risco das distribuições ajustadas de sinistros com a exposição do atual portfólio. Na Tabela 3 é

possível verificar que a exposição ao risco de cauda medido pelo CVaR se aproximam em ordem de grandeza, gerando sinistros similares aos verificados na real exposição.

**Tabela 3:** CVaR estimado para as distribuições *Weibull* e *Bootstrap*

Classe de Negócios	CVaR Weibull	CVaR Empírico Bootstrap	Diferença Relativa
1	- 174.033.938	- 166.456.572	4,6%
2	- 14.246.500	- 23.261.445	-38,8%
3	- 25.599.577	- 27.409.273	-6,6%
4	- 159.797.523	- 128.059.029	24,8%
5	- 69.675.989	- 81.851.909	-14,9%
6	- 116.413.256	- 88.055.407	32,2%
7	- 321.619.383	- 218.832.972	47,0%
8	- 54.706.208	- 39.706.633	37,8%

Fonte: Elaborado pelos autores.

## 4.2 Otimização

Nesta subseção tem-se como objetivo apresentar os resultados obtidos pelo processo de otimização (conjunto de equações 5) e observar o comportamento do modelo proposto em diferentes cenários. Inicialmente, utilizar-se-á um modelo menos restritivo, considerando como único fator restritivo a atual aversão ao risco da resseguradora medido pelo  $CVaR_{\alpha}$ , a fim de observar o melhor resultado possível para o atual portfólio. Posteriormente, serão avaliadas premissas mais restritivas quanto ao balanceamento dos atuais percentuais de retenção da resseguradora. Por fim, será analisado o comportamento do algoritmo quando é estabelecida uma estrutura de dependência entre as classes de negócio.

### 4.2.1 Independência entre os grupos

Inicialmente assume-se a hipótese de independência entre os grupos avaliados, ou seja: a exposição a determinado risco não está relacionada a qualquer variação do risco de outra linha de negócio. Portanto, não haveria qualquer efeito de diversificação neste cenário.

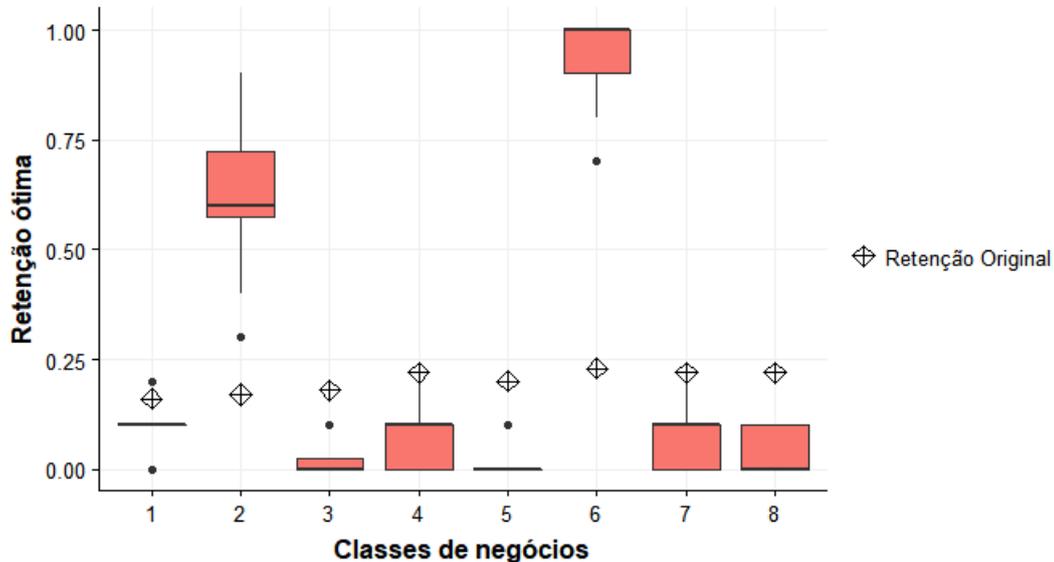
O nível de risco a ser considerado nesta simulação corresponde ao  $CVaR_{0,5\%}$  do atual portfólio da resseguradora, que pode ser interpretado como o valor esperado dos 0,5% piores resultados operacionais simulados para o portfólio de 1 ano, considerando a retenção atual da companhia. Como métrica de performance, será considerada a esperança dos resultados obtidos nas simulações, ou seja: será otimizado o resultado técnico da companhia, com a restrição de um nível de risco dado por  $CVaR_{0,5\%}$ , de modo a se obter um resultado superior à esperança do atual portfólio.

De acordo com a Figura 2, verifica-se que as linhas de negócio 2 e 6 ensejam maior retenção por parte da resseguradora, por possuírem característica de maior estabilidade no resultado operacional. Em particular, a linha de negócios 2 é a que apresenta menor desvio-padrão entre todas. Por sua vez, a linha de negócio 6 é a que apresenta a menor relação entre a severidade média e o prêmio médio. Este conjunto de evidências indica que a resseguradora poderia reter uma parcela maior dos riscos subscritos nestas linhas de negócios a fim de atingir o melhor resultado de subscrição possível. De modo contrário, porém, quando se analisam os resultados das demais linhas, pode-se inferir que o nível de retenção atualmente praticado está além do poderia ser considerado ideal.

Vale ressaltar que o resultado operacional ótimo é atingido quando se realiza o rebalanceamento do portfólio como um todo. Somente a redução ou o aumento do portfólio em determinadas linhas não implicam que o resultado seja ótimo. O balanceamento parcial pode

afetar negativamente o equilíbrio da carteira, aumentando o risco ao qual está exposto e/ou reduzindo o resultado absoluto observado.

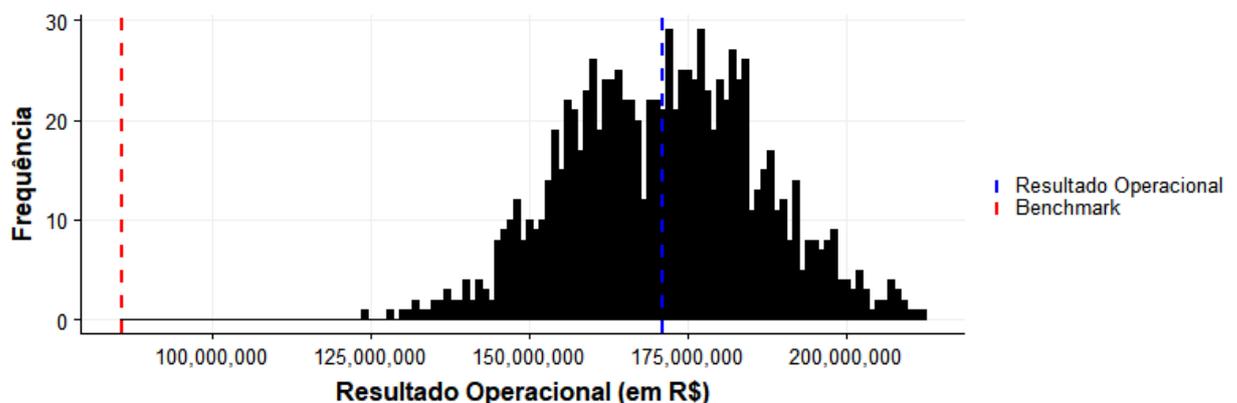
**Figura 2** – Boxplot da retenção ótima para cada classe de negócio em 1000 replicações do processo de otimização.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Na Figura 3, é possível observar que a resolução do modelo de otimização estocástico possibilita o aumento substancial do resultado operacional esperado da companhia. Isto pode ser explicado pela flexibilização da escolha de retenção por parte da resseguradora, que é feita diretamente no modelo de otimização, e é possível aumentar a retenção em cerca de 4 a 5 vezes em algumas linhas. Na prática, porém, isto não é possível dado que a demanda por contratos de resseguro é finita e elástica, ou seja: o risco dos contratos subscritos tendem a aumentar, *caeteris paribus*, quando há um aumento da oferta de contratos por parte da resseguradora.

**Figura 3** – Distribuição do resultado operacional agregado da companhia, oriunda das 1000 resoluções do problema de otimização

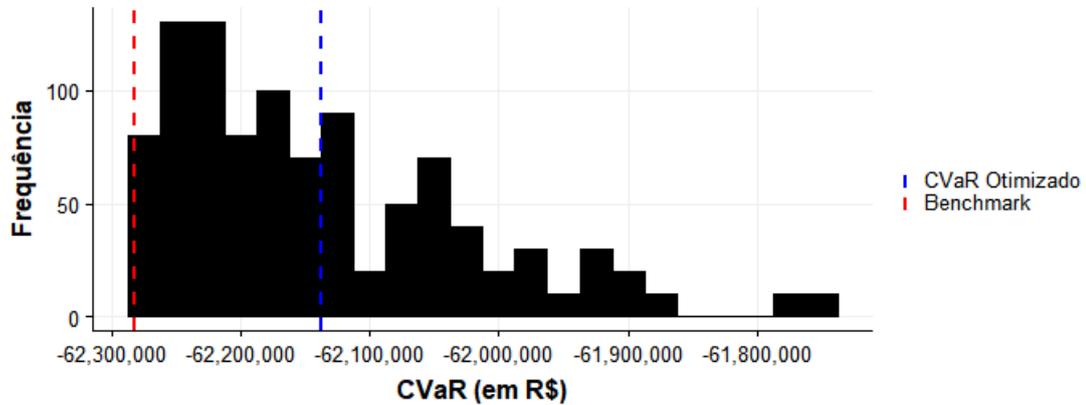


Fonte: Elaborado pelos autores.

Quando avaliado o risco agregado do portfólio medido pelo CVaR, é possível notar, pela Figura 4, o truncamento das observações no nível R\$62,3 milhões negativos, que representa o limite de risco restritivo do modelo. Nota-se que os resultados observados são próximos do limite imposto pelo modelo, sugerindo que a resseguradora está utilizando quase

a totalidade da capacidade de subscrição, pois, no pior dos casos, apenas 500 mil reais (0,85%) do CVaR não é utilizado para a subscrição de novos riscos.

**Figura 4** – Distribuição do CVaR<sub>0,5%</sub> agregado da companhia, oriunda das 1000 resoluções do problema de otimização



Fonte: Elaborado pelos autores.

Os resultados obtidos com as simulações são coerentes quando comparados com as métricas comumente utilizadas no mercado de (res)seguros, como o índice combinado técnico, que consiste na razão do somatório dos sinistro ocorridos e comissões pagas pelo prêmio ganho. A Tabela 4 mostra que as linhas com menores índices combinados médios são as que o modelo aponta para um aumento na retenção. Além disso, linhas com sinistros mais severos apresentam penalização no modelo de otimização, pois a função objetivo utiliza como métrica justamente os sinistros de cauda, que, por sua vez, são coerentes com a medida de curtose das distribuições de sinistros ajustadas.

**Tabela 4** – Nível de retenção otimizado para cada classe de negócios.

Classe de Negócios	Retenção	Índice Combinado	CVaR Empírico Bootstrap
1	0,10	0,82	-166.456.572
2	0,65	0,66	- 23.261.445
3	0,03	0,95	- 27.409.273
4	0,07	0,94	-128.059.029
5	0,01	0,94	- 81.851.909
6	0,95	0,71	- 88.055.407
7	0,08	0,86	-218.832.972
8	0,05	0,97	- 39.706.633
<b>RO</b>		171.154.171,72	
<b>CVaR</b>		-62.137.038,78	
<b>Melhora RO</b>		199,62%	

Fonte: Elaborado pelos autores.

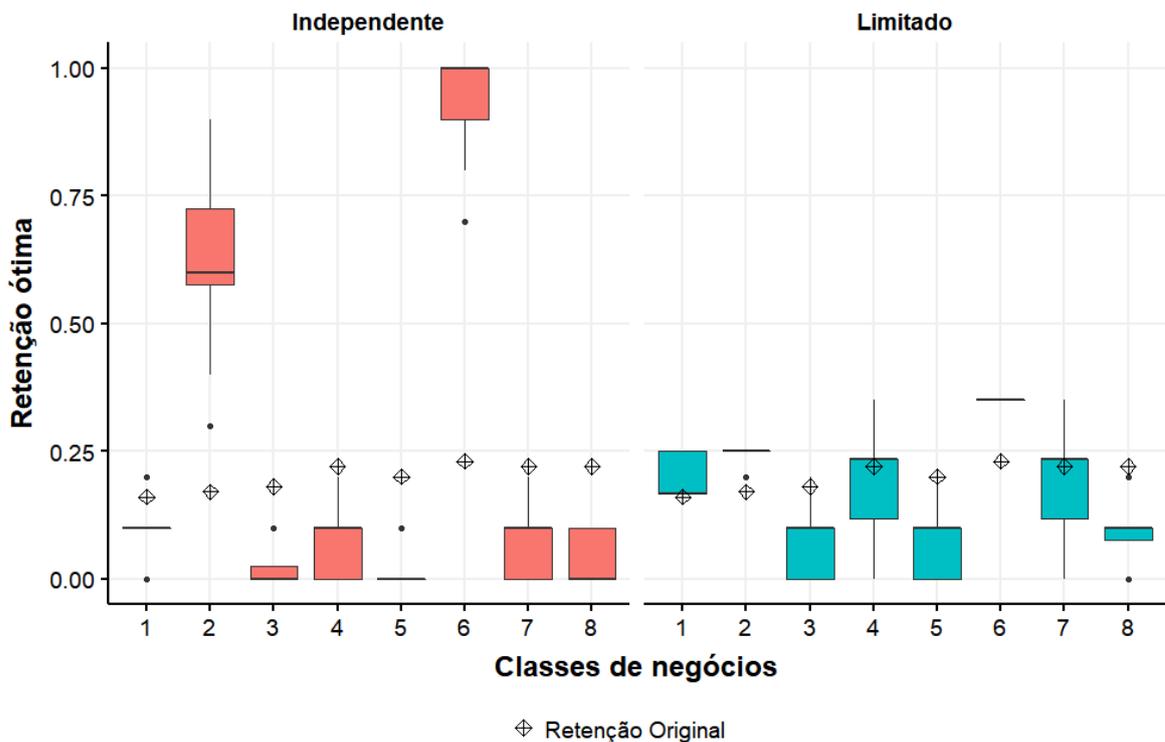
A Tabela 5, por sua vez, traz uma análise de sensibilidade dos resultados caso tivesse sido adotado um vetor de retenção por classe de negócio distinto da média. Os resultados apontam para um CVaR agregado não muito diferente, mas os resultados operacionais bastante elásticos. Assim, entende-se que o intervalo admissível para o resultado operacional está entre R\$ 136 milhões e 200 milhões.

**Tabela 5** – Estatísticas descritivas para o nível de retenção ideal por classe de negócios.

Retenção por Classe de Negócio	Mínimo	Mediana	Média	Máximo
$q_1$	0,00	0,10	0,10	0,20
$q_2$	0,30	0,60	0,65	0,90
$q_3$	0,00	0,00	0,03	0,10
$q_4$	0,00	0,10	0,07	0,20
$q_5$	0,00	0,00	0,01	0,10
$q_6$	0,70	1,00	0,95	1,00
$q_7$	0,00	0,10	0,08	0,20
$q_8$	0,00	0,00	0,05	0,10
<b>RO</b>	136.310.138	170.347.325	171.154.172	200.198.719
<b>CVaR</b>	- 62.279.236	- 62.164.819	- 62.137.039	- 61.747.504
<b>Melhora RO</b>	159,0%	198,7%	199,6%	233,5%

Fonte: Elaborado pelos autores.

Adotando a premissa de limitação do crescimento por linha de negócio em 50% da atual cessão, de modo a não alterar radicalmente a política de subscrição, é possível observar pela Figura 5 que os resultados permanecem consistentes com os observados na simulação inicial, apontando para um aumento de retenção nas classes 2 e 6. Contudo, linhas com baixa participação no modelo menos restrito tiveram aumentadas as suas retenções, pois devido à nova restrição do modelo, seria necessário subscrever contratos em linhas com perfil de risco mais elevadas, mas ainda lucrativas (como pode ser observado pelos índices combinados), de modo a atender o atual nível de risco da companhia. Este efeito pode ser observado pela Figura 6, em que o aumento do resultado ainda é substancial, porém inferior ao modelo ilimitado.

**Figura 5** – Boxplot da retenção ótima para cada classe de negócio em 1000 replicações do processo de otimização, com limitação do crescimento da carteira.

Fonte: Elaborado pelos autores.

#### 4.2.2 Impondo uma estrutura de dependência para as classes de negócios

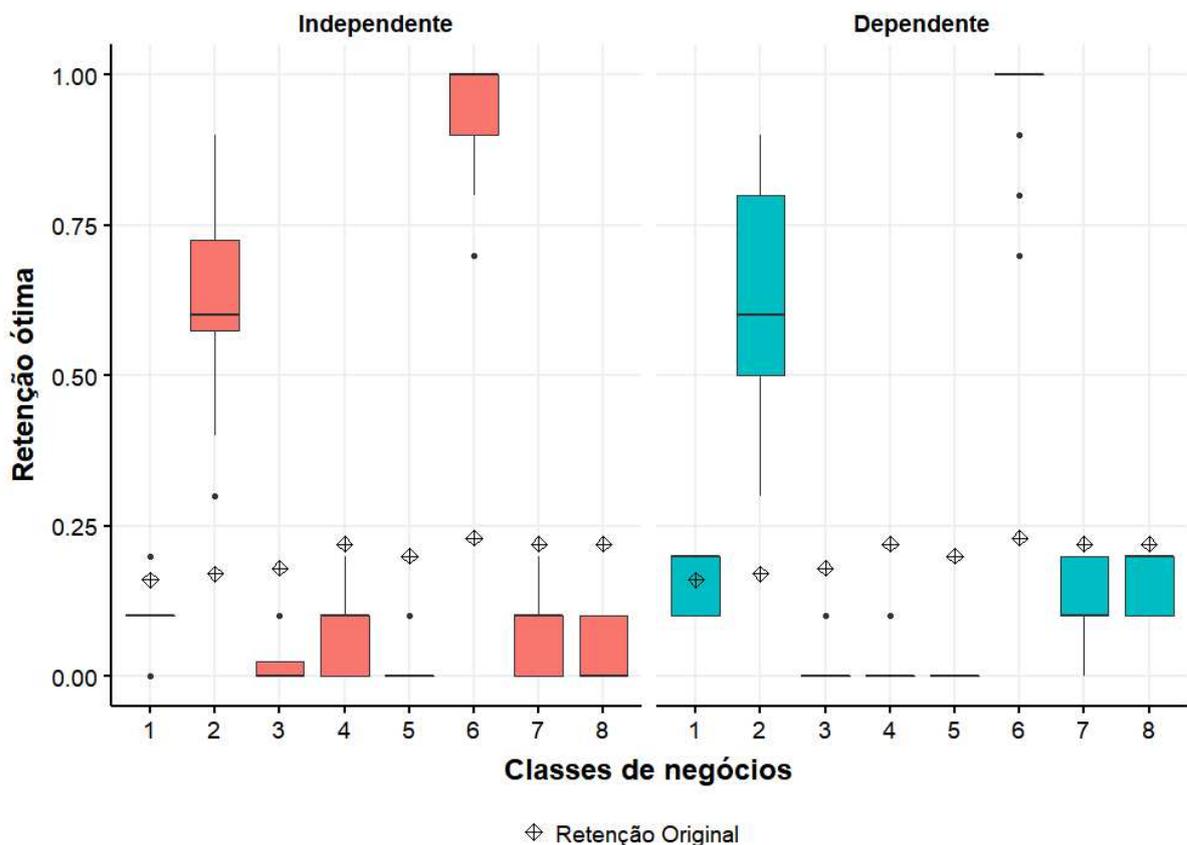
Agora uma restrição adicional será imposta ao conjunto de equações 5. Aqui, assume-se que as classes de negócios compartilham uma estrutura de dependência entre si. Para os fins deste trabalho, utiliza-se a matriz de correlação entre as classes de negócios estabelecida pela Resolução CNSP 321/2015, utilizada pela SUSEP para a determinação dos capitais de solvência a serem dimensionados pelas (res)seguradoras. Com esta nova premissa, a forma que é mensurado o risco da carteira é alterada, podendo ser descrito pela equação 6.

$$CVaR_{\alpha}(X) = \sqrt{v' \cdot \Sigma \cdot v}, \quad (6)$$

em que  $v$  representa o vetor dos  $CVaR_{\alpha}(X)$  individuais por classe de negócio e  $\Sigma$  representa a matriz de correlação entre cada classe de negócios.

Pode-se observar pela Figura 6 que há um aumento da retenção nas linhas 1 e 8. Isto se deve ao fato de elas serem pouco correlacionadas ou correlacionadas negativamente com as linhas 2 e 6, resultando em uma maior diversificação do portfólio. Já as linhas 3, 4 e 5 seriam totalmente expurgadas do portfólio devido à correlação positiva com as demais linhas, resultando em um aumento do risco agregado do portfólio.

**Figura 6** – Boxplot da retenção ótima para cada classe de negócio em 1000 replicações do processo de otimização, com estrutura de dependência.



Fonte: Elaborado pelos autores

A Tabela 6 apresenta o resumo dos resultados ótimos obtidos pela resolução do problema de otimização apresentado na seção 3.3. É possível notar que os resultados operacionais no modelo dependente são melhores do que os resultados operacionais no caso da independência, mesmo com o aumento do risco medido pelo CVaR. Trata-se de um conjunto

de evidências esperado, uma vez que as dependências entre as classes são positivas, sinalizando que as perdas incorridas em uma linha estão associadas às perdas de outra classe. Em outras palavras, é esperado que haja potencialização da capacidade operacional, assim como é esperado que o risco incorrido, por consequência, aumente nessas condições.

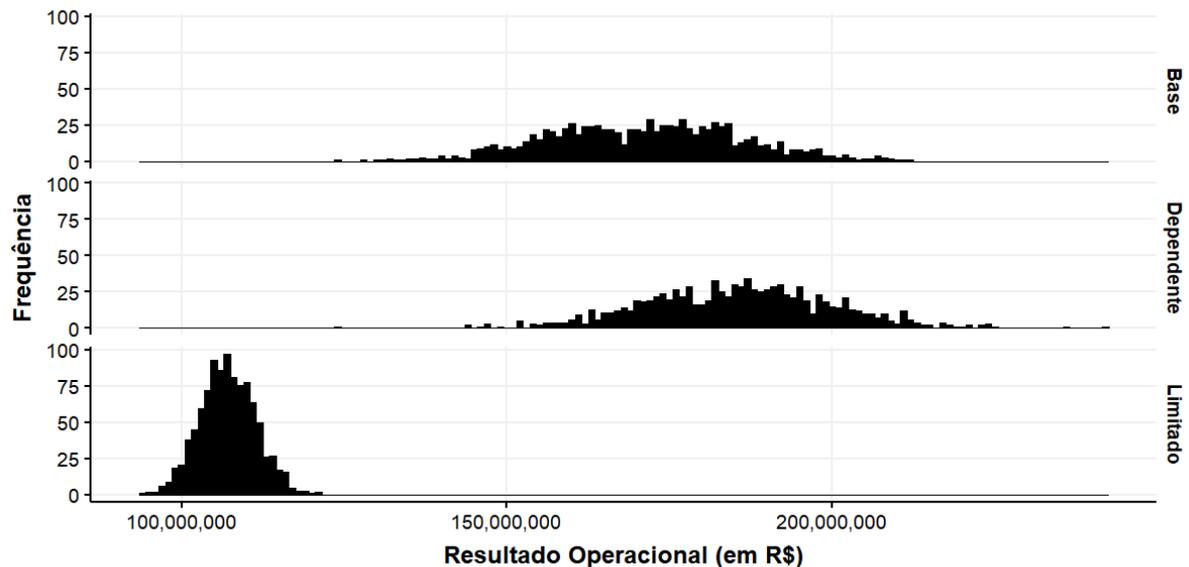
**Tabela 6** – Resultados ideais dos limites de retenção, resultado operacional e medidas de risco por classe de negócios, para cada cenário considerado

Cenários	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$	$q_7$	$q_8$	RO	CVaR
Base	0,10	0,65	0,03	0,07	0,01	0,95	0,08	0,05	171.154.171,72	- 62.137.038,78
Limitado	0,20	0,25	0,06	0,19	0,06	0,35	0,22	0,09	107.042.565,81	- 62.001.380,18
Dependente	0,17	0,64	0,01	0,00	0,00	0,99	0,13	0,16	185.769.571,89	- 78.469.120,77
Benchmark	0,16	0,18	0,19	0,22	0,21	0,23	0,22	0,22	85.741.849,63	- 62.282.075,22
Benchmark com correlação	0,16	0,18	0,19	0,22	0,21	0,23	0,22	0,22	85.741.849,63	- 78.889.937,15

Fonte: Elaborado pelos autores

A Figura 7 apresenta o comparativo dos resultados operacionais obtidos nos diferentes cenários simulados. Nota-se que tanto no cenário base (classes independentes), como na situação em que se incorpora a estrutura de dependência, há um ganho significativo no resultado operacional observado. Isto se deve à maior flexibilização das premissas quando comparados com o cenário limitado. Porém, observa-se maior dispersão dos resultados nos dois primeiros cenários, implicando em maior incerteza relacionada ao resultado esperado ao final de 1 ano.

**Figura 7** – Distribuição do resultado operacional agregado da companhia, oriunda das 1000 resoluções do problema de otimização



Fonte: Elaborado pelos autores

## 5. Considerações Finais

Neste trabalho buscou-se determinar a retenção ótima de uma resseguradora, maximizando seu resultado de subscrição, nos diferentes grupos e ramos de atuação, a partir de microdados de uma resseguradora local que opera no mercado brasileiro. Como estratégia de análise, foram utilizados métodos de otimização condicionada, que determinaram a oferta ideal dos contratos para os portfólios de resseguro, sujeito a restrições de medidas de risco aceitáveis que reflitam a aversão ao risco da resseguradora. Embora o método fosse análogo ao de Rasmusson (2014), o presente artigo inova por utilizar o ponto de vista do subscritor. Ademais,

expande-se a literatura ao incorporar uma estrutura de dependência entre as classes de negócios, por meio da qual foi possível avaliar os efeitos de diversificação do portfólio.

Como resultados obtidos ao adotar a suposição de independência entre as carteiras, verificou-se que foi possível otimizar o resultado operacional da companhia, tanto no modelo irrestrito como no modelo mais restrito, e os resultados observados são coerentes com os índices combinados das linhas de negócio. Em um segundo momento, a estrutura de dependência foi incorporada no modelo, com o intuito de avaliar a sensibilidade dos resultados. Os resultados apontam para um aumento do risco do portfólio devido à correlação positiva entre as linhas de negócio, bem como é observado o efeito de diversificação ao rebalancear a carteira, obtendo resultados operacionais melhores quando conhecida a estrutura de dependência entre as linhas.

Além de estender o escopo do trabalho foi possível contribuir com a inauguração da literatura nacional, inexistente até o momento de elaboração deste trabalho, acerca do tema de otimização da oferta de (res)seguros. Contudo, deve-se alertar que diversas premissas foram simplificadas para a implementação do algoritmo, de modo que não é possível generalizar o algoritmo para qualquer operação, bem como todas as premissas utilizadas no algoritmo devem estar devidamente calibradas a fim de refletir idiosincrasias operacionais de cada companhia.

Como sugestão para pesquisas futuras, vislumbram-se dois desdobramentos naturais para este trabalho. O primeiro é estender esta análise para tratados não-proporcionais. Aqui, apenas os proporcionais foram abordados e os tratados de excesso de dados (de todos os tipos) e *stop-loss* constituem em ferramentas muito apropriadas de gerenciamento de risco para as seguradoras. E o segundo desdobramento poderia ser uma translação à visão da seguradora, que é a entidade que demanda a subscrição de tratados de resseguro. Para as seguradoras, buscar a proteção patrimonial ideal, por meio do melhor tratado possível, pode aliviar capital de solvência e possibilitar a priorização de atividades em ramos que lhes tragam eficiência operacional.

## 6. Referências

- Arrow, K. J. (1963). Uncertainty and the welfare economics of medical care. *The American Economic Review*, 53(5), 141–149.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., & Heath, D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 9(3), 203–228. <https://doi.org/10.1111/1467-9965.00068>
- Balbás, A., Balbás, B., & Heras, A. (2009). Optimal reinsurance with general risk measures. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44, 374–384. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2008.11.008>
- Bernard, C., & Tian, W. (2009). Optimal Reinsurance Arrangements Under Tail Risk Measures. *Journal of Risk and Insurance*, 76(3), 709–725. Retrieved from <http://www.aria.org/meetings/2007papers/VC - 2 - Bernard.pdf>
- Borch, K. (1960). The safety loading of reinsurance premiums. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1960(3–4), 163–184. <https://doi.org/10.1080/03461238.1960.10410587>
- Cai, J., Lemieux, C., & Liu, F. (2016). OPTIMAL REINSURANCE FROM THE PERSPECTIVES OF BOTH AN INSURER AND A REINSURER. *ASTIN Bulletin*, 46(3), 815–849. <https://doi.org/10.1017/asb.2015.23>
- Cai, J., & Tan, K. S. (2007). Optimal retention for a stop-loss reinsurance under the VaR and CTE risk measures. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 37(1), 93–112. Retrieved from <https://sci-hub.tw/https://doi.org/10.1017/S0515036100014756>
- Cai, J., Tan, K. S., Weng, C., & Zhang, Y. (2008). Optimal reinsurance under VaR and CTE

risk measures. *Insurance: Mathematics and Economics*, 43, 185–196. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2008.05.011>

Carvalho, J. V. F., & Chiann, C. (2013). Redes Bayesianas: Um Método para Avaliação de Interdependência e Contágio em Séries Temporais Multivariadas. *Revista Brasileira de Economia*, 67, 201–217. Retrieved from <http://go.worldbank.org/>

De Moura, A. B. (2017). *OPTIMAL REINSURANCE OF DEPENDENT RISKS*. Lisbon School of Economics & Management. Retrieved from <https://www.repository.utl.pt/bitstream/10400.5/14783/1/DM-ABM-2017.pdf>

Gonçalves, M. (2008). *Um estudo sobre funções de dependência e medidas de risco*. Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da Universidade de São Paulo, São Paulo. <https://doi.org/10.11606/T.45.2008.tde-22122008-150501>

Hürlimann, W. (2011). OPTIMAL REINSURANCE REVISITED-POINT OF VIEW OF CEDENT AND REINSURER. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 41(2), 547–574. <https://doi.org/10.2143/AST.41.2.2136988>

Kaas, R., Dhaene, J., & Leuven, K. U. (2008). *Modern Actuarial Risk Theory: Using R*. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-70998-5>

Markowitz, H. (1952). *Portfolio Selection*. *The Journal of Finance* (Vol. 7). Retrieved from [https://www.math.ust.hk/~maykwok/courses/ma362/07F/markowitz\\_JF.pdf](https://www.math.ust.hk/~maykwok/courses/ma362/07F/markowitz_JF.pdf)

Mostafa, E. H., Driss, E., & Mohammed, E. H. (2018). Interaction between the VaR of cash flow and the interest rate using the ALM. *Journal of Statistical and Econometric Methods*, 7(1), 1792–6939.

Rasmusson, E. (2014). Retrocession for Portfolio Optimization in Reinsurance. Retrieved from <http://www.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2%3A725600&dswid=-5939>

Rockafellar, T., & Uryasev, S. (2000). Optimization of Conditional Value-at-Risk. *Journal of Risk*, 2, 21–42. Retrieved from [www.gloriamundi.org](http://www.gloriamundi.org).

Rockafellar, T., & Uryasev, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance*, 26, 1443–1471. Retrieved from [www.elsevier.com/locate/econbase](http://www.elsevier.com/locate/econbase)

Roman, D., & Mitra, G. (2009). PORTFOLIO SELECTION MODELS: A REVIEW AND NEW DIRECTIONS. *Wilmott Journal: The International Journal of Innovative Quantitative Finance Research*, 1, 69–85. Retrieved from <https://bura.brunel.ac.uk/bitstream/2438/3879/1/Fulltext.pdf>

Saad, N., & Ribeiro, C. O. (2004). Modelos determinísticos de gestão de ativo/passivo: uma aplicação no Brasil. *Revista Contabilidade & Finanças*, 15(34), 50–62. <https://doi.org/10.1590/S1519-70772004000100004>

Sun, H., Weng, C., & Zhang, Y. (2017). Optimal multivariate quota-share reinsurance: A nonparametric mean-CVaR framework. *Insurance: Mathematics and Economics*, 72, 197–214. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2016.11.006>

Yuen, K. C., Liang, Z., & Zhou, M. (2015). Optimal proportional reinsurance with common shock dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, 64, 1–13. Retrieved from <http://hdl.handle.net/10722/214577>