

Análise da Fronteira de Eficiência de Markowitz: um Estudo com Empresas do Setor de Educação Listadas na B3

ALINE PACHECO PRIMÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA (UFSC)

LEONARDO FLACH

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA (UFSC)

ANÁLISE DA FRONTEIRA DE EFICIÊNCIA DE MARKOWITZ: UM ESTUDO COM EMPRESAS DO SETOR DE EDUCAÇÃO LISTADAS NA B3

RESUMO

Com o intuito de obter melhores rendimentos de seus investimentos com menores riscos, investidores têm optado pela teoria de composição de carteiras, onde é avaliado o binômio risco *versus* retorno que resulta na fronteira eficiente. A fundamentação dessa teoria vem da pesquisa de Markowitz. Esta pesquisa tem por objetivo analisar a fronteira de eficiência para um conjunto de cinco empresas do setor de educação listadas na bolsa de valores B3: Ânima Holding (ANIM3), Cogna Educação (COGN3), Ser Educacional (SEER3), YDUQS Participações (YDUQ3) e Bahema Educação (BAHI3). Como método de pesquisa, a análise foi realizada entre as datas 01/01/2017 e 13/05/2021, e para a modelagem de dados foi utilizada a linguagem de programação Python no notebook da google (*Colaboratory*). Foi utilizado o método estatístico de Simulação de Monte Carlo (SMC), para desenvolver 400 mil carteiras fictícias com pesos randômicos. Para a comparação das carteiras, foi utilizado como benchmark o índice Bovespa (IBOV). Os resultados mostraram que a Carteira de Markowitz (Minha Carteira) apresentou o melhor desempenho.

PALAVRAS-CHAVE: Fronteira de Eficiência; Carteira de Markowitz; Python; Simulação de Monte Carlo.

1. Introdução

A definição de ativos para a alocação de investimentos no mercado de ações é de grande importância para os investidores, pois a escolha correta destes pode propiciar maior rentabilidade, ou menor prejuízo. Para isso, o modelo de Markowitz propôs a otimizar riscos e retornos na seleção de carteiras (LOPES, *et al. et al.*2010).

Segundo Santos (*et al. et al.*2020) no modelo de portfólios de Markowitz os retornos dos ativos são modelados como variáveis aleatórias, onde seu objetivo é escolher os pesos de cada ativo na carteira ponderadamente de forma ideal formando um conjunto ótimo de pesos que resulte na minimização da variância do portfólio a partir de um nível mínimo de retorno esperado ou maximização do retorno esperado a partir de um nível máximo de variância do portfólio (SANTOS, *et al. et al.*2020).

A fronteira eficiente tem como objetivo apresentar um resultado ótimo ou carteiras ótimas, ou seja, o máximo retorno de uma linha de carteiras para um nível de risco determinado a partir da combinação de um grupo de ações formando carteiras diferentes e infinitas (SILVA, *et al. et al.*2019).

Para isso, avaliar a fronteira eficiente antes de investidores colocarem seu dinheiro em ações na bolsa de valores é de extrema relevância para obterem seus propósitos. O artigo tem como objetivo analisar a fronteira de eficiência para um conjunto de cinco ativos do setor de educação listadas na bolsa de valores B3: Ânima Holding (ANIM3), Cogna Educação (COGN3), Ser Educacional (SEER3), YDUQS Participações (YDUQ3) e Bahema Educação (BAHI3).

2. Modelo de Markowitz e Fronteira Eficiente

Harry Markowitz criou, em 1952 a Teoria Moderna de Carteira com seu artigo “*Portfolio Selection*”, onde a principal característica é de diversificação para reduzir o risco global de um portfólio de investimentos, com isso, por meio da avaliação e compensação do risco dos ativos que integram a carteira, obter combinações mais eficientes de alocação de recursos (SILVA, *et al. et al.*, 2019).

A teoria de Markowitz é um modelo de programação quadrática para formar carteiras (LOPES, *et al. et al.* 2010). O modelo diz que a variância de uma carteira pode ser dada como a soma da variância de cada ação e as covariâncias entre pares de ações da carteira, conforme o peso de cada ação na carteira (GONÇALVES JR, *et al. et al.*, 2002).

Santos (*et al. et al.*, 2020) conceitua fronteira eficiente como a combinação de um determinado grupo de ações formando infinitas e diferentes carteiras, onde as carteiras situadas ao longo da fronteira eficiente são consideradas ótimas, evidenciando melhor desempenho para um risco menor (SANTOS, *et al. et al.*, 2020).

Marques *et al. et al.* (2013) afirma que “Para um investidor que está considerando um investimento em um conjunto fechado de ativos e tem disponível um determinado montante em dinheiro a ser investido, é possível a criação de inúmeras carteiras por meio de investimentos em distintas proporções do montante financeiro disponível para cada ativo.” (MARQUES *et al.*, 2013). Para cada carteira criada é gerado um risco e uma taxa de retorno, o conjunto de carteiras eficientes são as que possuem o menor risco para um nível de retorno especificado e o melhor retorno para um nível de risco determinado (MARQUES *et al.*, 2013).

A carteira eficiente está relacionada com o binômio risco e retorno, ou seja, para obter o retorno desejado o investidor pode reduzir o risco dos investimentos alterando a alocação dos recursos (SILVA, *et al. et al.* 2019).

3. Risco, Retorno, Covariância e Correlação

Para Silva (*et al.*, 2019) o risco de mercado, também conceituado como risco sistêmico, pode ser visto como as oscilações de preços transcorridos de eventos que atingem todo o mercado, portanto, numa negociação de ações, quanto mais o preço de uma ação varia num período de tempo maior é o risco de ganhar ou perder dinheiro, esta medida é chamada de volatilidade (SILVA *et al.*, 2019). Nascimento (2020) descreve a volatilidade como a variação do preço dos ativos financeiros e, com isso, os valores dos seus índices causados pelas instabilidades de fatores econômicos, políticos e sociais (NASCIMENTO, 2020).

Na teoria de Markowitz risco é sinônimo de volatilidade, onde esta se refere à quantidade de risco relacionada às alterações de valor em uma ação (SANTOS *et al.*, 2020). O cálculo da volatilidade é o desvio padrão dos retornos dos ativos.

O retorno pode ser considerado quanto um investidor espera ganhar com relação a um investimento (SILVA *et al.*, 2019). Marques *et al.* (2013) afirmam que a taxa de retorno de um investimento mede sua velocidade de crescimento ou decréscimo e que pode ser calculada pelo percentual da variação do valor final do investimento com o seu valor inicial em um determinado período (MARQUES *et al.*, 2013).

Gonçalves Jr. *et al.* (2002) afirma que apesar da correlação positiva entre risco e retorno, ou seja, quando um aumento o outro aumenta junto, é possível trabalhar com a diversificação, onde se faz possível diminuir o risco de uma carteira, tornando-a mais confiável do que o risco individual de o ativo mais seguro da carteira (GONÇALVES JR *et al.*, 2002).

A covariância mede a força de uma relação linear entre duas variáveis aleatórias e é calculada pela média das diferenças combinadas. Quando a covariância entre duas variáveis é igual à zero significa dizer que elas são independentes.

Com isso, o modelo de Markowitz pode ser dado por (GONÇALVES JR *et al.*, 2002):

$$E = \sum_{i=1}^n X_i \mu_i$$

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^n X_i = 1$$

Onde:

$X_i \geq 0$;

E = Retorno esperado da carteira;

V = Variância da carteira;

X_i = Participação de cada ativo;

μ_i = Retorno esperado de cada ativo;

σ_{ij} = Covariância entre o par de ativos se (i) diferente (j) e variância se (i) igual a (j).

4. Empresas de Serviços Educacionais na Bolsa de Valores B3

Hoje as empresas listadas na Bolsa de Valores B3, como Serviços Educacionais, são as seis apresentadas na Tabela 1. Porém, como a empresa Cruzeiro do Sul Educacional aparece listada somente no ano de 2021, ela não foi usada para a coleta de dados da pesquisa, pois os dados foram retirados desde 2017, quando a empresa Bahema Educação começou sua participação na área educacional.

Tabela 1 - Empresas Listadas como Serviços Educacionais na B3

Nome	Código	Capitalização	Volume
Ânima Holding	ANIM3	4,71B	4.720.100
Bahema Educação	BAHI3	180,34M	1.400
Cogna Educação	COGN3	7,44B	77.916.300
Cruzeiro do Sul Educacional	CSED3	5,12B	414.900
SER Educacional	SEER3	1,81B	1.097.900
YDUQS Participações	YDUQ3	9,57B	3.353.000

Fonte: INVESTING, 2021.

4.1. Ânima Holding (ANIM3)

A empresa começou em 2003 com a aquisição do Centro Universitário Una, em Belo Horizonte. Já em 2006 a Ânima adquiriu o Centro Universitário Monte Serrat (Unimonte), em

2009 o Centro Universitário de Belo Horizonte (UniBH), em 2013 a HSM e fez sua estreia na bolsa de valores (ÂNIMA, 2021). Em 2014 a empresa adquiriu a Universidade São Judas, em 2016 a Sociedade Educacional de Santa Catarina (Sociesc) e em 2018, a empresa firmou parceria com a rede internacional de culinária francesa Le Cordon Bleu inaugurando a primeira escola do instituto do Brasil em São Paulo (ÂNIMA, 2021). No mesmo ano expandiu suas universidades, comprou a Faculdade Divinópolis e programou o ensino referenciado por competências chamado de Ecossistema Ânima de Aprendizagem (E2A) (ÂNIMA, 2021). Em 2019 foi adquirido a AGES, assinou o Instrumento Particular de Opção de Aquisição da Manutenção de Instituição de ensino Superior e Outras Avenças com a Fundação Universidade do Sul de Santa Catarina (UNISUL) e a aquisição total da UNICURITIBA (ÂNIMA, 2021). Em 2020 comprou 100% das cotas da Inovattus Empreendimentos e Participações Ltda., assinou a opção de compra do Centro Universitário FG (UniFG), adquiriu o grupo Laureate, controle da MEDROOM e inaugurou o Learning Village (primeiro hub de inovação e educação da América Latina) (ÂNIMA, 2021).

Segundo a Ânima (2021), em 2020 a empresa somou aproximadamente 140 mil estudantes em sete estados brasileiros, e é uma das maiores organizações educacionais privadas de ensino superior do país em receita e número de alunos matriculados (ÂNIMA, 2021). Na Tabela 2 são apresentados os dados financeiros da empresa Ânima Holding desde o ano de 2017.

Tabela 2 - Dados Financeiros da Ânima Holding (ANIM3) (em milhões)

Ânima (ANIM3)	31/12/2020	31/12/2019	31/12/2018	31/12/2017
Receita Total	1421,99	1181,5	1102,46	1045,67
Lucro Bruto	736,62	509,92	395,32	399,13
Receitas Operacionais	118,18	119,97	38,66	86,17
Lucro Líquido	-41,11	-9,59	2,25	85,15
Total do Ativo	4582,44	2400,02	1446,47	1338,15
Total do Passivo	2076,92	1709,59	781,22	641,71
Total do Patrimônio Líquido	2505,52	690,43	665,25	696,44

Fonte: INVESTING, 2021.

4.2. Cogna Educação (COGN3)

A Cogna foi criada na década de 1960 com o curso pré-vestibular Pitágoras, onde nas décadas seguintes virou uma rede de escolas e em 2000 virou faculdade. A participação da empresa na bolsa de valores começou em 2007 com o nome de Kroton Educacional (COGNA, 2021).

Segundo Cogna (2021), a empresa é considerada uma das principais organizações educacionais no mundo, formada pelas instituições Kroton, Platos, Saber e Vasta Educação/Somos Educação com 1 milhão de alunos atendidos diretamente e 1.4 milhões de alunos em escolas e instituições parceiras (COGNA, 2021).

Na Tabela 3 é possível visualizar os dados financeiros da empresa Cogna Educação a partir do ano de 2017.

Tabela 3 - Dados Financeiros da Cogna Educação (COGN3) (em milhões)

Cogna Educação (COGN3)	31/12/2020	31/12/2019	31/12/2018	31/12/2017
Receita Total	5269,14	7027,19	6060,71	5557,75
Lucro Bruto	3322,22	4217,57	3791,9	3451,86
Receitas Operacionais	-3236,91	1016,94	1244,9	1694,51
Lucro Líquido	-5805,84	235,24	1403,75	1882,32
Total do Ativo	30783,79	34118,45	31949,13	18220,44
Total do Passivo	17574,71	18286,04	16046,49	3012,71
Total do Patrimônio Líquido	13209,08	15832,41	15902,64	15207,73

Fonte: INVESTING, 2021.

4.3. Ser Educacional (SEER3)

A empresa começou em 1994, com a criação do curso de preparação para concursos públicos Bureau Jurídico. A partir de 2003, a empresa entrou no setor de educação superior com a Universidade Maurício Nassau e começou a sua expansão, estando hoje em 24 cidades e 12 estados do país, chegando a mais de 152 mil alunos (SER, 2021).

O grupo da empresa compreende a Universidade da Amazônia (UNAMA), Centro Universitário Maurício de Nassau e Faculdade UNINASSAU, Centro Universitário Joaquim Nabuco e Faculdade UNINABUCO, Universidade de Guarulhos (UNG), Centro Universitário Universus e Faculdade UNIVERITAS, Centro Universitário do Norte (UNINORTE), Faculdades Integradas do Tapajós (FIT), Escola Técnica Joaquim Nabuco, Escola Técnica Maurício de Nassau, Instituto Ser Educacional e Instituto de Pesquisas UNINASSAU (SER, 2021). A Tabela 4 exibe os dados financeiros da empresa Ser Educacional desde o ano de 2017.

Tabela 4 - Dados Financeiros da Ser Educacional (SEER3) (em milhões)

Ser Educacional (SEER3)	31/12/2020	31/12/2019	31/12/2018	31/12/2017
Receita Total	1250,46	1275,99	1262,49	1231,79
Lucro Bruto	639,77	682,02	685,5	675,14
Receitas Operacionais	313,19	260,27	235,69	256,04
Lucro Líquido	165,03	136,37	201,28	197,47
Total do Ativo	3091,49	2559,16	2429,56	2507,87
Total do Passivo	1665	1250,67	959,02	999,48
Total do Patrimônio Líquido	1426,49	1308,49	1470,54	1508,39

Fonte: INVESTING (2021).

4.4. YDUQS Participações (YDUQ3)

A empresa começou em 1970 com a Faculdade de Direito Estácio de Sá no Rio de Janeiro que em 1972 foi transformada em Faculdades Integradas Estácio de Sá com a criação de novos cursos. Em 1988 conquistou o status de Universidade e em 1996 deu-se início a expansão da universidade, em 1997 criou o primeiro centro superior de formação com o Instituto Politécnico Universitário, em 2006 criou parcerias com a École Hotelière de Lausanne e a Alain Ducasse Formation, em 2007 a empresa entrou na bolsa de valores, em 2009 iniciou as operações na modalidade de ensino à distância. Em 2011 a YDUQS adquiriu a Faculdade Atual da Amazônia (FAA), Faculdade de Natal (FAL), Faculdade de Excelência

Educacional do Rio Grande do Norte (FATERN) e Academia de Concursos. Em 2012 a empresa comprou a SEAMA, Faculdade São Luís, Faculdade iDez, FARGS e UNIUOL. Em 2013, adquiriu a FACITEC, ASSESC e UniSeb. Em 2014 adquiriu a LITERATUS, Faculdade IESAM e Faculdade CEUT. Em 2015 adquiriu a Faculdade Nossa Cidade, Faculdade de Castanhal, já em 2016 adquiriu as Faculdades Unidas Feira de Santana. Em 2019 a empresa criou a marca YDUQS, adquiriu a Sociedade de Ensino Superior Toledo LTDA (UniToledo) e por fim, em 2020 comprou o Athenas Grupo Educacional e obteve a aprovação da aquisição da Adtalem Educacional do Brasil (YDUQS, 2021). A Tabela 5 expõe os dados financeiros da empresa YDUQS Participações desde o ano de 2017.

Tabela 5 - Dados Financeiros da YDUQS Participações (YDUQ3) (em milhões)

YDUQS Participações (YDUQ3)	31/12/2020	31/12/2019	31/12/2018	31/12/2017
Receita Total	3853,74	3565,04	3619,38	3378,98
Lucro Bruto	2108,82	2044,32	1986,57	1601,87
Receitas Operacionais	356,38	900,02	772,01	543,51
Lucro Líquido	98,18	646,14	644,87	424,59
Total do Ativo	9265,27	5512,49	4102,46	4021,09
Total do Passivo	6060,3	2410,14	1511,05	1243,84
Total do Patrimônio Líquido	3204,97	3102,35	2591,41	2777,26

Fonte: INVESTING (2021).

4.5. Bahema Educação (BAHI3)

A Bahema foi criada em 1953 com comércio de máquinas agrícolas, e foi somente em 2016 que passou a investir no setor de educação e em 2017 adquiriu participação em 4 escolas e criou o Critique. Em 2019 a empresa tornou-se sócia do Centro Educacional Viva e consegue o controle do Fórum cultural, adquirindo também o Colégio Bis e o Colégio Apoio (BAHEMA, 2021).

A Bahema desenvolve projetos nas áreas de educação pré-escolar, infantil, básica, cursos pré-vestibulares, aulas particulares e outras atividades relacionadas a esporte e cultura, também presta serviços de apoio às instituições educacionais (BAHEMA, 2021). A Tabela 6 divulga os dados financeiros da empresa Bahema Educação desde o ano de 2017.

Tabela 6 - Dados Financeiros da Bahema Educação (BAHI3) (em milhões)

Bahema Educação (BAHI3)	31/12/2020	31/12/2019	31/12/2018	31/12/2017
Receita Total	196,34	53,06	44,11	37,63
Lucro Bruto	75,93	18,94	15,11	16,02
Receitas Operacionais	-23	-10,47	-2,35	-1,93
Lucro Líquido	-45,88	-9,18	-1,27	-4,56
Total do Ativo	602,71	191,1	87,7	97,36
Total do Passivo	420,48	69,4	33,31	39
Total do Patrimônio Líquido	182,23	121,7	54,39	58,36

Fonte: INVESTING, 2021.

5. Método de pesquisa

A pesquisa utilizou-se de uma abordagem quantitativa, seguindo o paradigma clássico positivista. Este método permite chegar a verdades universais, sendo reprodutíveis e generalizáveis, para isso, envolve coleta e análise de dados numéricos e aplicação de testes estatísticos, tanto na fase de coleta como no tratamento de dados (ALVES-MAZZOTTI e GEWANDSZNAJDER, 2005). Por meio do modelo de Markowitz, a pesquisa busca analisar a fronteira eficiente para o conjunto de 5 ativos na bolsa de valores B3 no setor de educação.

Quanto a estratégia, o trabalho se enquadra em um estudo de casos, pois procura responder a um problema que é os maus investimentos na bolsa de valores acarretando em prejuízos financeiros consideráveis, de forma a avaliar empresas listadas como Serviços Educacionais na B3.

A amostra utilizada para a realização da pesquisa foram empresas listadas como Serviços educacionais na Bolsa de Valores B3: Ânima Holding (ANIM3), Cogna Educação (COGN3), Ser Educacional (SEER3), YDUQS Participações (YDUQ3) e Bahema Educação (BAHI3). Não foi utilizada a empresa Cruzeiro do Sul Educacional por ela estar listada na B3 apenas a partir de janeiro de 2021, e com isso, poderia tornar os resultados inconsistentes.

A coleta de dados foi realizada entre 01/01/2017 a 13/05/2021, com o apoio da linguagem de programação Python no notebook da Google (*Colaboratory*) através das bibliotecas *pandas* e *pandas_datareader* que coleta dados do *yahoo! finance*.

Foi utilizada a Simulação de Monte Carlo (SMC) para a criação de 400 mil carteiras fictícias com os 5 ativos, onde foram atribuídos pesos randômicos para cada portfólio. Esta técnica é empregada desde os anos 1970 e utiliza-se de números aleatórios e pseudo-aleatórios para gerar amostras de uma distribuição de probabilidades (CARDOSO e AMARAL, 1999). A SMC foi aplicada em diversas pesquisas para avaliar riscos em fundos de investimentos, (KOCH e SOUZA, 2019), (SILVA *et al.*, 2010), (VOGLIOTTI, 2012).

Na pesquisa a simulação ajudou na construção de forma aleatória de portfólios próximos aos ótimos dentro de uma relação de retorno. Após isso, foi calculado o retorno e volatilidade (risco) para todas as carteiras fictícias e exibido a fronteira eficiente para estes ativos. Em seguida, foi criado um *array* (matriz de valores do mesmo tipo) com as alocações de cada ativo e, calculado o retorno da “Minha Carteira”.

Em seguida, para fins de comparação com a “Minha Carteira”, foram importados os dados do IBOV (índice Bovespa) para Benchmark e analisados os resultados. A comparação foi realizada com o *ibovespa*, pois este é o principal índice de ações brasileiras e ele é composto por aproximadamente 60 ações mais negociadas na bolsa de valores B3, representada por uma carteira teórica que configura cerca de 80% de volume negociado nos últimos 12 meses (NASCIMENTO, 2020).

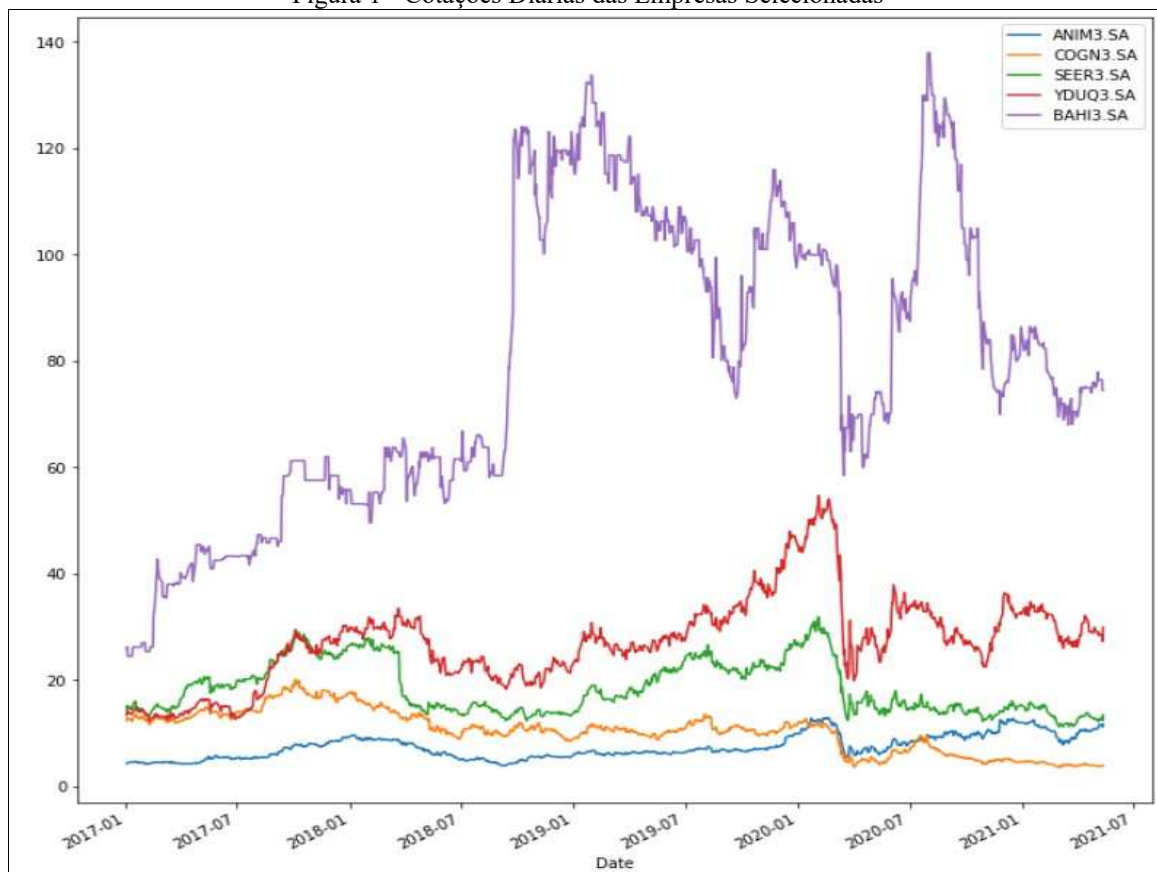
6. Resultados

No primeiro momento foi importado a biblioteca *pandas_datareader* e selecionado os ativos Anima Educação (ANIM3), Cogna (COGN3), Ser Educacional (SEER3), YDUQS (YDUQ3) e Bahema (BAHI3). Após, foi criado o dataframe e alimentado com os dados da base do *yahoo! finance* no intervalo de 01/01/2017 a 13/05/2021 com a coluna “*Adj Close*”, que apresenta o fechamento ajustado de cada dia.

O gráfico da Figura 1 apresenta as cotações diárias das empresas selecionadas dentro do intervalo de tempo. No gráfico conseguimos ver que a cotação da empresa Bahema Educação (BAHI3) se sobressai às demais, já estando cotada em torno aos R\$140,00, próximo ao período de 07/2020, decaindo para menos de R\$80,00 em sua última cotação

analisada. Em segundo lugar atualmente está a empresa YDUQS (YDUQ3), em terceiro a Ser Educacional (SEER3), muito próxima da quarta Ânima Holding (ANIM3) e, a cotação mais baixa atualmente é a Cogna Educação (COGN3), que se manteve na quarta colocação até começo de 2020 trocando de lugar com a Ânima.

Figura 1 - Cotações Diárias das Empresas Seleccionadas



Fonte: Elaboração própria.

O retorno diário foi calculado através da função *df.pct_change()* presente na biblioteca Pandas do Python. Também foi retirado o primeiro dia aplicando a função *retorno_diario.iloc[1:]*, pois no primeiro dia o retorno diário será nulo devido não ter os dados do dia anterior. Com isso, temos o resultado da Figura 2 que mostra os primeiros 5 e os últimos 5 resultados num total de 1079 dias analisados. Sabemos a partir da planilha fornecida (Figura 2) que no primeiro retorno analisado (04/01/2017) todas as empresas obtiveram quedas em suas ações, onde a Bahema Educação (BAHI3) teve a maior queda de todos os ativos analisados com 6,66%, e a menor queda foi da empresa Ânima Holding (ANIM3) com 0,15%. Já na última data analisada (13/05/2021), tirando a empresa Bahema Educação (BAHI3) que ficou estável, todas as outras empresas tiveram elevações nas suas ações, onde a YDUQS Participações (YDUQ3) obteve maior alta, de 9,66%.

Figura 2 - Retorno Diário das Empresas

	ANIM3.SA	COGN3.SA	SEER3.SA	YDUQ3.SA	BAHI3.SA
Date					
2017-01-04	-0.001496	-0.005731	-0.006760	-0.004905	-0.066667
2017-01-05	0.003745	-0.012968	-0.039790	-0.016020	0.000000
2017-01-06	0.029851	-0.007299	0.035441	-0.007514	0.000000
2017-01-09	0.026087	-0.006618	-0.015798	-0.005047	0.000357
2017-01-10	-0.004944	-0.008882	-0.019796	-0.001902	0.000000
...
2021-05-07	0.038121	0.005195	0.023482	0.007749	0.000000
2021-05-10	-0.003416	0.025840	0.019778	-0.003146	0.000000
2021-05-11	-0.002571	-0.012594	0.008534	0.001052	0.000000
2021-05-12	-0.036082	-0.035714	-0.044615	-0.043433	-0.026144
2021-05-13	0.044563	0.023810	0.086957	0.096668	0.000000

1079 rows × 5 columns

Fonte: Elaboração própria.

Depois de calcular o retorno diário, foi calculado o retorno anual a partir da função *retorno_diario.mean()*252*. O número 252 é o valor aproximado de dias úteis no ano (número de pregões).

Em seguida, foi calculada a covariância diária, que mede o grau com que os ativos estão se “movendo”. A função do Pandas presente no Python para a covariância é a “cov” representada no algoritmo por *retorno_diario.cov()*.

Depois de encontrada a covariância diária foi possível chegar na covariância anual que se dá multiplicando a covariância diária por 252 (número de pregões do ano).

A Simulação de Monte Carlo permite que seja identificado possíveis situações e riscos para um negócio, calculando probabilidades de acerto ou perda. Com os retornos anuais e covariância calculados, realizamos então a Simulação de Monte Carlo. Para isso, foi criado 400 mil portfólios fictícios a partir dos ativos e usado a função randômica *np.random.random(num_assets)* para gerar os pesos, posteriormente foi calculado o retorno, covariância e volatilidade dos portfólios formados.

A Figura 3 apresenta a tabela gerada a partir da simulação de forma decrescente pelo valor do retorno. Nela verificamos que o maior retorno foi o portfólio 43012 com retorno 0,3755 (37,55%) e volatilidade de 0.4926 (49,26%), onde a carteira é formada 3% de ações da Ânima Holding (ANIM3), 0,16% da Cogna Educação (COGN3), 1,65% da Ser Educacional (SEER3), 6,5% da YDUQS Participações (IDUQ3) e 88,69% de ações da empresa Bahema Educação, perfazendo os 100%.

O segundo melhor desempenho foi o portfólio 2651 com 37,40% de retorno e 43,62% de volatilidade, composto por 23,39% de ações da Ânima Holding (ANIM3), 0,2% de Cogna Educação (COGN3), 0,2% de Ser Educacional (SEER3), 1,28% de YDUQS Participações (YDUQ3) e 74,93% de Bahema Educação (BAHI3) atingindo os 100% de ações. Dessa

maneira, conseguimos verificar que este portfólio também é uma ótima opção, pois seu retorno é muito próximo ao primeiro colocado (portfólio 43012) e com menor risco que o primeiro.

Outrossim, o menor retorno foi o portfólio 236165 com valor de -0,0878 (-08,78%) e volatilidade de 0,5056 (50,56%), em que as ações são divididas em 1% de Ânima Holding (ANIM3), 89,34% da Cogna Educação (COGN3), 2% de Ser Educacional (SEER3), 3,11% de YDUQS Participações (YDUQ3) e 4,55% de Bahema Educação (BAHI3) totalizando os 100%.

Com isso, podemos verificar que com o risco (volatilidade) próximo temos o melhor e pior retorno. A tabela (Figura 3) trouxe apenas os 5 melhores retornos e os 5 piores retornos por fins explicativos.

Figura 3 - Retornos Decrescentes da Simulação de Monte Carlo

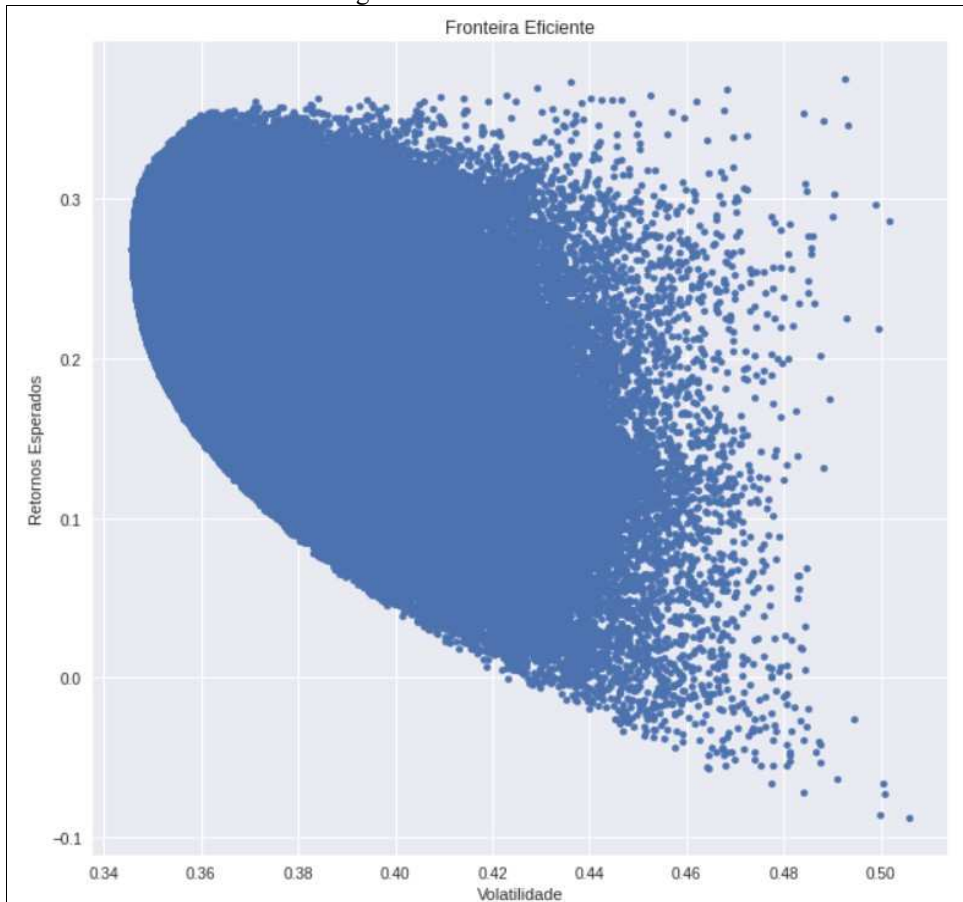
	Retornos	Volatilidade	Peso-ANIM3.SA	Peso-COGN3.SA	Peso-SEER3.SA	Peso-YDUQ3.SA	Peso-BAHI3.SA
43012	0.375541	0.492632	0.030679	0.001615	0.016567	0.064158	0.886981
2651	0.373960	0.436247	0.233888	0.001955	0.002052	0.012755	0.749349
124210	0.369596	0.429106	0.206964	0.002866	0.011362	0.046705	0.732104
354205	0.368730	0.468194	0.064682	0.017411	0.000933	0.088347	0.828627
333152	0.365528	0.452408	0.088954	0.003036	0.035091	0.079967	0.792953
...
147856	-0.066396	0.477411	0.016369	0.753388	0.194080	0.024438	0.011725
399804	-0.071797	0.483873	0.006682	0.774047	0.174797	0.036069	0.008404
382358	-0.072401	0.500667	0.032293	0.847368	0.038112	0.063320	0.018907
188524	-0.085619	0.499801	0.044183	0.873509	0.047962	0.006767	0.027578
236165	-0.087821	0.505670	0.009894	0.893485	0.019961	0.031120	0.045540

400000 rows x 7 columns

Fonte: Elaboração própria.

Depois de realizada a simulação de Monte Carlo, e calculado os retornos e volatilidade para cada um dos 400 mil portfólios criados, foi possível plotar o gráfico de exibição da Fronteira Eficiente (Figura 4). Nele conseguimos verificar que a menor volatilidade atingida está um pouco acima de 0.34 (34%) e a maior está acima de 0.50 (50%). Também vimos que os retornos esperados ótimos estão acima de 0,2 (20%).

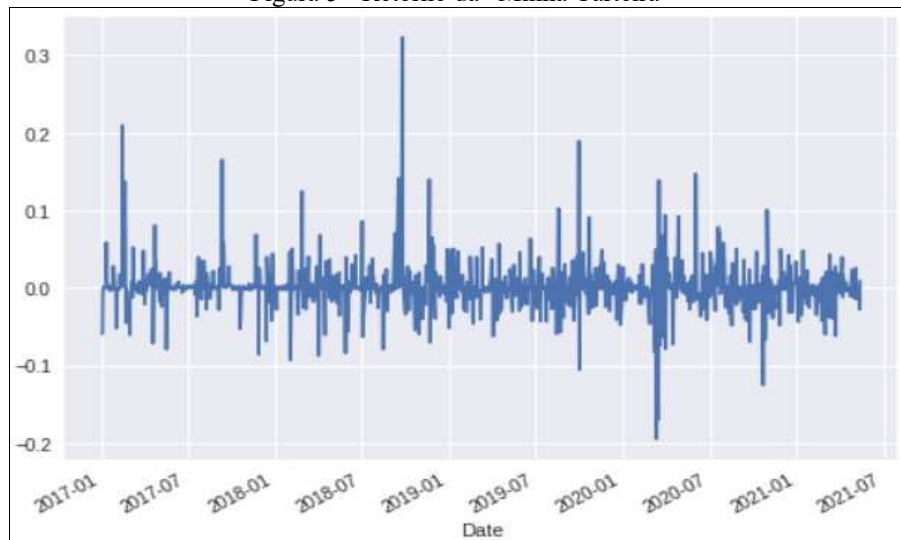
Figura 4 - Fronteira Eficiente



Fonte: Elaboração própria.

Em seguida, foi criado um *array* (matriz de valores) com as alocações de cada ativo e calculado o retorno diário da “Minha Carteira” que é a soma dos retornos para compor o retorno da carteira no momento. O gráfico formado pela “Minha Carteira” é o fornecido na Figura 5.

Figura 5 - Retorno da “Minha Carteira”

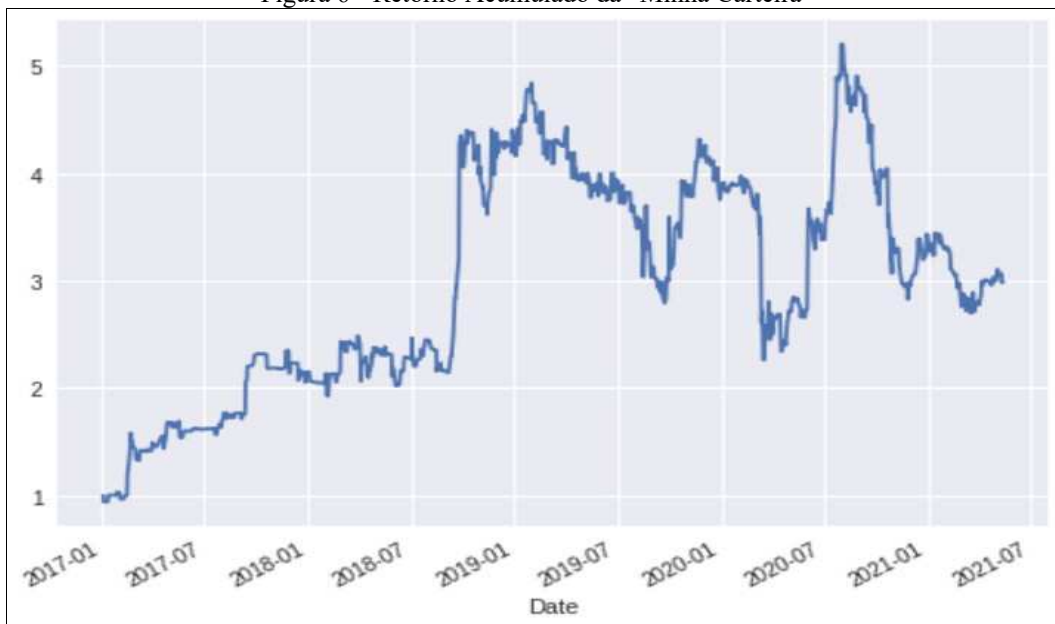


Fonte: Elaboração própria.

Na sequência, foi apresentado o retorno acumulado da “Minha Carteira” a partir da função $(1 + \text{retorno_carteira}).\text{cumprod}()$ e gerado o gráfico da Figura 6. A função *cumprod* faz a acumulação dos retornos ao longo do tempo.

Desse modo, podemos confirmar no gráfico que o retorno começou com média de R\$1,00 em 01/2017, obtendo seu maior ponto em torno de 07/2020, com valor maior que R\$5,00, e em seu último cálculo obteve em torno de R\$3,00. Portanto, o acúmulo de “Minha Carteira” em 13/05/2021 seria triplicado quando comparamos com o início da carteira em 01/2017.

Figura 6 - Retorno Acumulado da “Minha Carteira”



Fonte: Elaboração própria.

Para verificar se o retorno da “Minha Carteira” se apresentou satisfatório, foi necessário comparar com um Benchmark, para isso foi utilizado o índice Bovespa (IBOV).

Para este fim, importamos os dados do índice Bovespa (IBOV), calculando seus retornos acumulados a partir da função $(1 + \text{ibov_retornos}).\text{cumprod}()$ e assim, conseguimos comparar com a “Minha Carteira”.

Esta comparação está apresentada na Figura 7, nela vimos que no primeiro dia analisado o IBOV teve melhor retorno (1.037) que a “Minha Carteira” (1.001), porém ao longo do tempo a “Minha Carteira” obteve melhor rendimento, 3.356 contra os 2.025 do índice Bovespa.

Figura 7 - Minha Carteira X IBOV

	IBOV	Minha Carteira
Date		
2017-01-03	1.037339	1.007317
2017-01-04	1.033563	0.957617
2017-01-05	1.041652	0.956606
2017-01-06	1.034839	0.960635
2017-01-09	1.035426	0.964551
...
2021-05-07	2.047995	3.403979
2021-05-10	2.045831	3.401093
2021-05-11	2.063535	3.399954
2021-05-12	2.008928	3.299318
2021-05-13	2.025642	3.356841

1074 rows × 2 columns

Fonte: Elaboração própria.

Por fim, foi exibido o gráfico (Figura 8) de comparação entre as duas carteiras (Minha Carteira X IBOV) para visualização dos retornos das duas e análise do quanto a “Minha Carteira” pode ser eficiente.

Figura 8 - Gráfico Minha Carteira X IBOV



Fonte: Elaboração própria.

Todos os gráficos apresentados no artigo foram gerados no Python, no algoritmo desenvolvido para a pesquisa, e está disponível no link: <https://colab.research.google.com/drive/1fDBIqqhYd3PYsnZvCEDRUvrBwfyahboy?usp=sharing>.

7. Considerações Finais

O trabalho teve objetivo de analisar a fronteira de eficiência para um conjunto de cinco ativos do setor de educação listadas na bolsa de valores B3: Ânima Holding (ANIM3), Cogna Educação (COGN3), Ser Educacional (SEER3), YDUQS Participações (YDUQ3) e Bahema Educação (BAHI3), podendo ser utilizado de forma a auxiliar investidores para que tenham uma tomada de decisão na alocação de recursos financeiros efetivos.

Os resultados mostraram que a “Minha Carteira” obteve a sua média triplicada ao longo do tempo e quando comparada com o índice Bovespa mostrou melhor rendimento. Por fim, também podemos verificar que o algoritmo desenvolvido para a análise foi eficaz em sua função, ficou simples e compreensível para o público investidor e pode ser utilizado com outros ativos (3 ou mais) para avaliação da fronteira eficiente.

Como trabalhos futuros, pretendemos programar outras funções no algoritmo para realizar diversas outras análises importantes para os investidores, como por exemplo, o Valuation que colabora com a avaliação da empresa.

Referências

ALVES-MAZZOTTI, Alda Judith; GEWANDSZNAJDER, Fernando (2004). **O método nas ciências naturais e sociais - Pesquisa Quantitativa e Qualitativa**. Livro. 2 ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning. 2004.

ANIMA Educação. **Histórico e perfil corporativo da empresa Ânima Holding**. Disponível em: <https://ri.animaeducacao.com.br/show.aspx?idMateria=A5TrcK/G412f8FtlVNVgCA==> Último acesso em: 12/05/2021.

BAHEMA Educação. **Institucional da empresa Bahema Educação**. Disponível em: <https://www.bahema.com.br/wp-content/uploads/sites/21/2020/01/INSTITUCIONAL-BAHEMA-novo.pdf>. Último acesso em 14/05/2021.

CARDOSO, Douglas; AMARAL, Hudson Fernandes. **O uso da simulação de monte carlo na elaboração do fluxo de caixa empresarial: uma proposta para quantificação das incertezas ambientais**. 1999.

COGNA Educação. **Sobre a empresa Cogna Educação**. Disponível em: <http://www.cogna.com.br/#lp-pom-block-30>. Último acesso em 12/05/2021.

GONÇALVES JR, Cleber; PAMPLONA, Edson de O.; MONTEVECHI, José A. **Seleção de carteiras através do modelo de markowitz para pequenos investidores (com o uso de planilhas eletrônicas)**. IX SIMPEP. Out. 2002. Bauru, SP.

INVESTING. **Índices das empresas na bolsa de valores B3**. Disponível em: <https://br.investing.com/equities/>. Último acesso em 15/05/2021.

KOCH, Jonas Marchry; SOUZA, Joana S. de. **Cálculo do valuation da companhia Renner S.A. com uso da simulação de monte carlo**. 2019.

LOPES, Ana Lúcia M.; CARNEIRO, Marcelo L.; SCHNEIDER, Aline B. **Markowitz na otimização de carteiras selecionadas por data envelopment analysis - DEA**. Revista Eletrônica Gestão e Sociedade. CEPEAD/UFMG. v.4, n.9, set/dez 2010.

MARQUES, Sandro; SILVA, Wesley Vieira da; CORSO, Jansen Maia del; DALAZEN, Luciano Luiz. **Comparação de desempenhos de carteiras otimizadas pelo modelo de markowitz e a carteira de ações do ibovespa.** Revista Evidenciação Contábil & Finanças. João Pessoa, v.1, n.1, p.20-37. jan/jun 2013.

NASCIMENTO, Marco Antonio. **O risco nos mercados acionários do continente americano à luz do modelo GARCH.** 2020. 83 f. Dissertação. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais - Cefet/MG.

SANTOS, Daiane Rodrigues dos; SILVA, Tuany E. Barcellos de Carvalho; VILLAGRÁN, Campo Elias Suárez; RIBEIRO, Tiago Costa; SANFINS, Marco Aurélio dos Santos. **Fronteira eficiente e escolha de carteiro de investimento: aplicação no mercado financeiro brasileiro. Anais...** Simpósio de Engenharia de Produção. Economia Circular e suas Interfaces com a Engenharia de Produção. XXVII SIMPEP. Nov. 2020.

SER Educacional. **Sobre o grupo Ser Educacional.** Disponível em: <https://www.sereducacional.com/>. Último acesso em 13/05/2021.

SILVA, Tuany E. B. C.; SANTOS, Daiane R.; SANFINS, Marco A. S. Modelo de Markowitz na otimização de investimentos usando o software r. **Brasilian Journal of Development.** Curitiba-PR. v.5, n.12, p.31005-31018. dez. 2019.

SILVA, W.V.; TARDELLI, M.; ROCHA, D. T. da; MAIA, M. **Aplicação da métrica value at risk a índices de bolsas de valores de países latino-americanos: um estudo utilizando os modelos de previsão de volatilidade EWMA, EQMA e GARCH.** Perspectiva. Erechim - RS, v. 34, n.128, p. 19-32. junho/2010.

VOGLIOTTI, Rodrigo. **Mensuração da exposição no momento default (EAD) para derivativos de balcão através da simulação de monte carlo.** Dissertação. Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, 2012.

YDUQS Participações. **Histórico e perfil corporativo da empresa YDUQS.** Disponível em: <https://www.yduqs.com.br/show.aspx?idCanal=U/ccuSh0iht1/mEX/ez1ng==> . Último acesso em 13/05/2021.